ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2004-2005

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 1: Ημερομηνίας παράδοσης: 21-3-2005

1. Να μελετηθεί η κίνηση σώματος μάζας m το οποίο βρίσκεται μέσα σε δυναμικό πεδίο με δυναμική ενέργεια: $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.
2. Απλό εκκρεμές αφήνεται από την ηρεμία σε μικρή γωνία φ ως προς την ανερχόμενη κατακόρυφο. Δείξετε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να δεκαπλασιαστεί η γωνιακή μετατόπιση είναι περίπου $\ln 10/\omega_o$, όπου όπου $\omega_o^2 = g/L$. Υπολογίσετε τον χρόνο αυτό για εκκρεμές με περίοδο T=2sec και βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του εκκρεμούς όταν φθάσει τη κατακόρυφο προς τα κάτω.
3. Σώμα μάζας m πέφτει κατακόρυφα υπό την επίδραση της βαρύτητος. Να γράψετε την εξίσωση κίνηση του σώματος, λαμβάνοντας υπόψιν και την αντίσταση του αέρος, -bυ. Να ολοκληρώσετε την προκύπτουσα εξίσωση και να δειχθεί ότι η μεγίστη ταχύτης, αν το σώμα αφήνεται εκ της ηρεμίας, είναι υ=mg/b.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 1:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.1:

Η δυναμική ενέργεια $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ έχει την γραφική παράσταση του Σχήματος 1.1a. Υπολογίζουμε τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης. Η παράγωγος είναι,

$$\frac{dV}{dx} = -x + x^3 = x(x^2 - 1) \qquad (1)$$

συνεπώς η συνάρτηση V έχει τα ακρότατα σημεία: x=0 και x=±1. Για x=0, η δυναμική ενέργεια ισούται με V(0)=0 και για x=±1, $V(\pm 1) = -\frac{1}{4}$. Διερευνώντας την δεύτερη παράγωγο $V''(x) = -1+3x^2$, στο σημείο x=0, $V''(0) = -1 < 0$, δηλ. πρόκειται για τοπικό μέγιστο (**ασταθές** σημείο ισορροπίας), ενώ στα σημεία x=±1, $V''(\pm 1) = 2 > 0$, δηλ. πρόκειται για τοπικά ελάχιστα (**ευσταθή** σημεία ισορροπίας). Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι,

$$m\ddot{x} = F(x), \qquad (2)$$

όπου $F(x) = -(-x + x^3)$. Πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέρη της (2) επί $\dot{x}$ και ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + E \qquad (3)$$

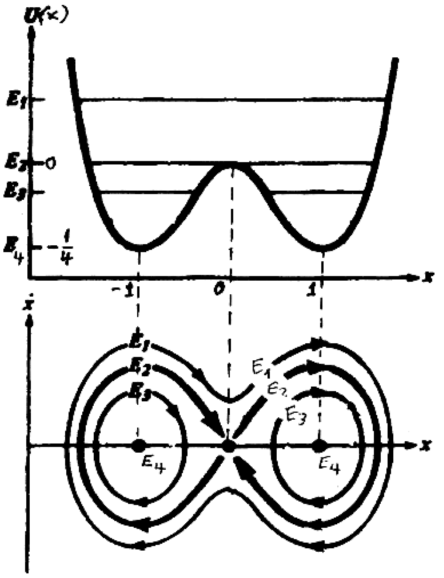
όπου Ε είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Ακόμη η (3) γράφεται, $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -V(x) + E$, απ' όπου φαίνεται ότι η σταθερά Ε παριστάνει την ολική ενέργεια.

Οι τροχιές στο χώρο των φάσεων του Σχήματος 1.1b δίδουν μια αρκετά κατατοπιστική εικόνα της κίνησης του σώματος στο δεδομένο δυναμικό. Συγκεκριμένα, το σύστημα έχει ένα **σαγματικό** σημείο ισορροπίας (saddle point) στο σημείο (0, 0) με κέντρα στα δύο ευσταθή σημεία ισορροπίας: (-1, 0)

(a)

(b)

Σχήμα 1.1



και (1, 0). Καθένα από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας περιβάλλεται από μια οικογένεια μικρών κλειστών τροχιών με ενέργειες $-\frac{1}{4} < E < 0$, ενώ για $E > 0$ υπάρχουν μεγάλες κλειστές τροχιές, οι οποίες περιβάλλουν και τα τρία σημεία ισορροπίας. Οι λύσεις είναι τυπικά περιοδικές, εκτός από τις δύο λύσεις ισορροπίας, (±1, 0), και τις δύο τροχιές που φαίνονται να ξεκινούν και να τελειώνουν στο σαγματικό σημείο (0, 0). Οι τροχιές αυτές πλησιάζουν το σημείο (0, 0) για $t \to \pm\infty$ και καλούνται **ομοκλινικές τροχιές**. Τέτοιες τροχιές είναι συνήθεις σε συντηρητικά συστήματα. Πρέπει να σημειώσουμε ότι μια ομοκλινική τροχιά δεν είναι περιοδική.

Αρμονική προσέγγιση κοντά στα ευσταθή σημεία ισορροπίας $x=\pm 1$: Θέτω $x=(\pm 1+\varphi)$ και αναπτύσσουμε κατά Taylor την δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο $\varphi=0$,

$$V(\varphi) = -\tfrac{1}{2}(\pm 1 + \varphi)^2 + \tfrac{1}{4}(\pm 1 + \varphi)^4$$

όπου $V(0) = -\frac{1}{4}$, $V'(0) = -(\pm 1 + \varphi) + (\pm 1 + \varphi)^3\Big|_0 = 0$, $V''(0) = -1 + 3(\pm 1 + \varphi)^2\Big|_0 = 2, \ldots$ οπότε η δυναμική ενέργεια γράφεται: $V(\varphi) = -\frac{1}{4} + \varphi^2$ και η δύναμη: $F(\varphi) = -\dfrac{dV}{d\varphi} = -2\varphi$. Συνεπώς η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\pm 1 + \varphi) = -2\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi\,,$$

όπου $\omega_o = \sqrt{\frac{2}{m}}$. Οι λύσεις της (5) είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις,

$$x = C\cos\omega_o t + D\sin\omega_o t$$

όπου (C,D) σταθερές. Συμπεραίνουμε ότι μικρές μετατοπίσεις από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας x=±1, οδηγεί σε περιοδικές τριγωνομετρικές λύσεις με συχνότητα $\omega_o = \sqrt{\frac{2}{m}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.2:

Όταν εκτραπεί το σώμα κατά θ από την ανερχόμενη κατακόρυφο (βλέπε Σχήμα 1.2), η δυναμική ενέργεια (με στάθμη αναφοράς το επίπεδο y=0) είναι,

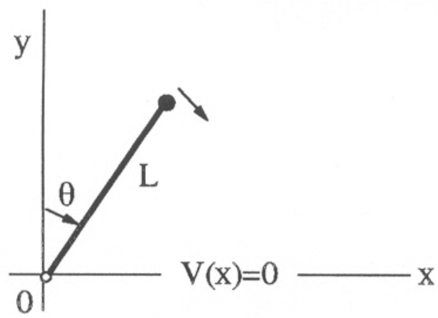
$$V = mg\,L\cos\theta, \qquad (1)$$

οπότε η ασκούμενη δύναμη σε πολικές συντεταγμένες θα είναι,

$$F = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} = mg\sin\theta \qquad (2)$$

(όπου r=L. Προφανώς η δύναμη αυτή εφαρμόζεται εφαπτομενικά).

Σχήμα 1.2



Η εξίσωση κίνησης (κατά την εφαπτομενική διεύθυνση) σε πολικές συντεταγμένες είναι,

$$mr\alpha = mg\sin\theta \qquad (3)$$

όπου $\alpha = \ddot{\theta}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση και r=L, $\dot{r} = 0$. Συνεπώς η (3) γράφεται,

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\sin\theta \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέλη επί $\dot{\theta}$ και ολοκληρώνομε,

$$\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{L}\cos\theta + c \qquad (5)$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσης. Εφαρμόζω τις αρχικές συνθήκες: για t=0, έχω θ=0 και $\dot{\theta}$=0, άρα η (5) δίδει: c=g/L. Συνεπώς, η (5) γράφεται

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{L}(1-\cos\theta) = 4\frac{g}{L}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

ή

$$\dot{\theta} = 2\omega_o \sin\frac{\theta}{2} \qquad (6)$$

όπου $\omega_o^2 = g/L$. Ολοκληρώνουμε την (6) από $\theta_o \rightarrow 10\theta_o$,

$$\int_{\theta_o}^{10\theta_o} \frac{d\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \omega_o \int_0^{\tau} dt\,. \qquad (7)$$

Για μικρές γωνίες (θ<<1) ισχύει: $\sin\frac{\theta}{2} \cong \frac{\theta}{2}$ (σε rads), οπότε η (7) δίδει: $\ln 10 = \omega_o\tau$ ή $\tau = \frac{\ln 10}{\omega_o}$.

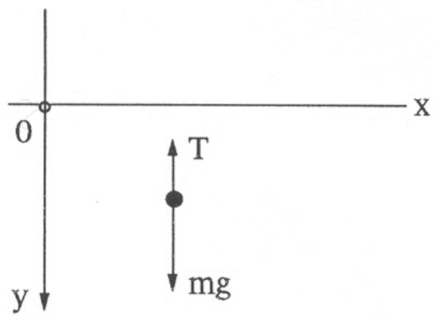
Αν η περίοδος είναι T=2sec, τότε $\omega_o = 2\pi/T = \pi$ rads/sec και συνεπώς ο χρόνος δεκαπλασιασμού της γωνίας είναι: $\tau = \frac{\ln 10}{\pi}$ sec = 0.73sec.

Η διατήρηση της ενέργειας στο ανώτατο και στο κατώτατο σημείο δίδει: $E = V_1+0=V_2+T_2$, ή $mg2L = \frac{1}{2}m(L\omega)^2$ (όπου υ=ωL είναι η ταχύτητα στο κατώτατο σημείο), άρα $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{L}} = 2\omega_o = 2\pi$ rad/sec.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.3:

Θεωρούμε ότι το σύστημα αξόνων κατευθύνονται όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 1.3. Επί του σώματος ασκούνται το βάρος του mg και η αντίσταση του αέρος T=–bυ.

Σχήμα 1.3



Η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\ddot{y} = mg - b\upsilon \qquad (1)$$

ή

$$\dot{\upsilon} + \frac{b}{m}\upsilon - g = 0 \qquad (2)$$

Ολοκληρώνουμε την (2) έχουμε,

$$\frac{d\upsilon}{g - \frac{b}{m}\upsilon} = dt\,, \text{ ή } \int \frac{d\upsilon}{g - \frac{b}{m}\upsilon} = \int dt\,, \text{ ή } -\frac{1}{\frac{b}{m}}\int \frac{d(\frac{mg}{b} - \upsilon)}{\frac{mg}{b} - \upsilon} = t + \alpha\,, \text{ ή } \ln(\upsilon_o - \upsilon) = -\frac{b}{m}t + \beta\,,$$

όπου υ_o=mg/b και α,β σταθερές ολοκλήρωσης, ή $\upsilon_o - \upsilon = Ae^{-\frac{b}{m}t}$, άρα

$$\upsilon = \upsilon_o - Ae^{-\frac{b}{m}t} \qquad (3)$$

όπου A σταθερά η οποία υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Πράγματι, για t=0, έχω υ=0, οπότε από την (3) έπεται, $A=\upsilon_o$, και η (3) γράφεται,

$$\upsilon = \upsilon_o(1 - e^{-\frac{b}{m}t}) \qquad (4)$$

Προφανώς η μεγίστη ταχύτης είναι: $\upsilon=\upsilon_o$=mg/b για $t\to\infty$.

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 2: Ημερομηνίας παράδοσης: 3-4-2005

1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω δυνάμεις είναι συντηρητικές:
   $F_x=ax+by^2,\ F_y=az+2bxy,\ F_z=ay+bz^2$
   $F_r=2ar\sin\theta\sin\varphi,\ F_\theta=ar\cos\theta\sin\varphi,\ F_\varphi=ar\cos\varphi$
2. (Διατομικό μόριο) Δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 συνδέονται μέσω ελατηρίου σταθεράς k, και μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβές κατά μήκος του άξονα x. (α) Γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για καθένα σώμα, και (β) αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα.
3. Σώμα κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση της κεντρικής δύναμης
   $$F=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right)$$
   όπου r η απόσταση του σώματος από το κέντρο έλξης. Να ευρεθεί η γενικευμένη δυναμική ενέργεια, η οποία δημιουργεί τέτοια δύναμη και από το αποτέλεσμα αυτό να γραφεί η Lagrangian του σώματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 2:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.1:

Έχομε δει ότι για να είναι η δύναμη $\vec{F}$ συντηρητική, πρέπει ο στροβιλισμός της $\vec{F}$ να ισούται με μηδέν, δηλ. $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ (αναγκαία και ικανή συνθήκη).

(i) Για τη δύναμη $\vec{F}$ με συνιστώσες: $F_x=ax+by^2$, $F_y=ax+2bxy$, και $F_z=ay+bz^2$, ο στροβιλισμός σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right).$$

όπου $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα. Υπολογίζουμε τις επί μέρους παραγώγους:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(ay+bz^2)-\frac{\partial}{\partial z}(az+2bxy)=a-a=0,$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial z}(ax+by^2)-\frac{\partial}{\partial x}(ay+bz^2)=0-0,$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(az+2bxy)-\frac{\partial}{\partial y}(ax+by^2)=2by-2by=0,$$

άρα $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ και συνεπώς η $\vec{F}$ είναι συντηρητική.

(ii) Για τη δύναμη $\vec{F}$ με συνιστώσες (σε σφαιρικές συντεταγμένες): $F_r=2ar\sin\theta\sin\varphi$, $F_\theta=ar\cos\theta\sin\varphi$, $F_\varphi=ar\cos\varphi$, ο στροβιλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta\,F_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hat{r}}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,F_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\theta)] + \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,F_\varphi)] + \frac{\hat{\varphi}}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}]$$

όπου $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα. Υπολογίζουμε τις επί μέρους παραγώγους:

$$[\tfrac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,F_\varphi) - \tfrac{\partial}{\partial\varphi}(rF_\theta)] = \tfrac{\partial}{\partial\theta}(ar^2\sin\theta\cos\varphi) - \tfrac{\partial}{\partial\varphi}(ar^2\cos\theta\sin\varphi) = ar^2\cos\theta\cos\varphi - ar^2\cos\theta\cos\varphi = 0,$$

$$[\tfrac{\partial}{\partial\varphi}F_r - \tfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,F_\varphi)] = \tfrac{\partial}{\partial\varphi}(2ar\sin\theta\sin\varphi - \tfrac{\partial}{\partial r}(ar^2\sin\theta\cos\varphi) = 2ar\sin\theta\cos\varphi - 2ar\sin\theta\cos\varphi = 0,$$

$$[\tfrac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \tfrac{\partial}{\partial\theta}F_r] = \tfrac{\partial}{\partial r}(ar^2\cos\theta\sin\varphi) - \tfrac{\partial}{\partial\theta}(2ar\sin\theta\sin\varphi) = 2ar\cos\theta\sin\varphi - 2ar\cos\theta\sin\varphi = 0,$$

άρα $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ και συνεπώς η $\vec{F}$ είναι συντηρητική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.2:

Θεωρούμε τις δύο μάζες να ολισθαίνουν πάνω στον άξονα x (βλέπε Σχήμα 2.1). Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι,

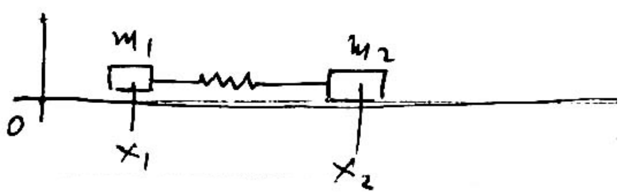
$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2, \qquad (1)$$

και η δυναμική ενέργεια,

$$V = \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_o)^2. \qquad (2)$$

(όπου l_o το αρχικό μήκος του ελατηρίου. Χωρίς να χάνεται η γενικότης, παίρνουμε l_o=0).

Σχήμα 2.1 Διαμήκης κίνηση διατομικού μορίου



Η Langrangian του συστήματος είναι,

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \qquad (3)$$

απ΄όπου υπολογίζουμε τις παραγώγους,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = k(x_2 - x_1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

Επομένως, οι εξισώσεις κίνησης Lagrange είναι,

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Προσθέτοντας τις (5) κατά μέλη, παίρνουμε $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$, ή $\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2) = 0$, άρα

$$(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2) = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (6)$$

Η ποσότης μέσα στη παρένθεση παριστάνει τη ολική ορμή του συστήματος, δηλ. $p \equiv m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 =$ σταθ. Να θυμηθούμε ότι το κέντρο μάζας (cm) του συστήματος ορίζεται από τη σχέση, $R_{cm} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1x_1 + m_2x_2)$, οπότε η ταχύτης του κέντρου μάζας είναι, $\upsilon_{cm} = \frac{dR_{cm}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)$. Αντικαθιστώντας συνεπώς στην (6) παίρνουμε: $(m_1+m_2)\upsilon_{cm} =$ σταθ., έπεται λοιπόν ότι υ_{cm} είναι σταθερή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.3:
Οι εξισώσεις κίνησης στο επίπεδο είναι,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \qquad (1\alpha)$$
$$m(r\ddot{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \qquad (1\beta)$$

όπου $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ είναι η ακτινική επιτάχυνση και $a_\theta = r\ddot{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ είναι η επιτρόχιος ή εφαπτομενική επιτάχυνση. Η ακτινική δύναμη $F_r = F = \frac{1}{r^2}(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2})$, ενώ η εφαπτομενική δύναμη F_θ=0. Η (1β) μπορεί να γραφεί,

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

απ’ όπου έπεται

$$mr^2\dot{\theta} = const$$

Η ποσότης στο πρώτο μέρος παριστάνει το μέτρο της στροφορμής *l*, δηλ. η στροφορμή είναι σταθερή. Έπεται λοιπόν ότι,

$$mr^2\dot{\theta} = l\,. \qquad (2)$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή $\dot{\theta}$ μεταξύ των εξισώσεων (2) και (1α), προκύπτει,

$$m(\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3}) = \frac{1}{r^2}(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2})\,,$$

ή

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{c^2}(-\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{2\ddot{r}}{r})\,. \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζω επί $\dot{r}$ κατά μέλη την (3) και ολοκληρώνω ως προς t,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} = -\frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + E$$

όπου E είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Το πρώτο μέρος παριστάνει τη κινητική ενέργεια, συνεπώς η δυναμική ενέργεια είναι,

$$V = \frac{1}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r}$$

και η Langrangian,

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r}$$

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 3: Ημερομηνίας παράδοσης: 18-4-2005

1. Θεωρήσατε ένα γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο με μάζες m, M, και m. Θεωρούμε μόνο τις διαμήκεις ταλαντώσεις του μορίου, δηλ. τα άτομα μπορούν να κινούνται μόνο κατά μήκος του άξονα του μορίου (τον οποίο να λάβετε σαν άξονα x). Το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων μπορεί να προσεγγιστεί από ένα ελατήριο σταθεράς k. Στη θέση ισορροπίας τα άτομα απέχουν μεταξύ τους απόσταση *l* (τα ακραία άτομα δεν είναι πακτωμένα). Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες, τα ιδιοδιανύσματα, και τις κανονικές μορφές ταλάντωσης του μορίου. Δώσατε και μια φυσική εικόνα για κάθε κανονική μορφή ταλάντωσης του μορίου

2. Να διαγωνοποιηθεί ο τανυστής:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

(Υπόδειξη: η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να παραγοντοποιηθεί)

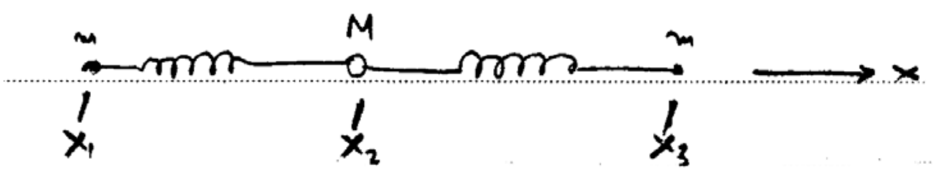
3. Στο πρόβλημα των δύο συζευγμένων εκκρεμών, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια είναι, αντίστοιχα: $T=\frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)$ και $V=\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2-2k\theta_1\theta_2)$, όπου k μια σταθερά. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες, τα ιδιοδιανύσματα, και τις κανονικές μορφές ταλάντωσης του συζεγμένου συστήματος. Δώσατε και μια φυσική εικόνα για κάθε κανονική μορφή ταλάντωσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 3:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.1:

Έστω το τριατομικό μόριο του Σχήματος 3.1. Υποτίθεται ότι τα άτομα μπορούν να κινούνται μόνο κατά μήκος του άξονα του μορίου, ο οποίος λαμβάνεται και σαν άξονας x.

Σχήμα 3.1



Η δυναμική ενέργεια του μορίου είναι,

$$V=\tfrac{1}{2}k(x_2-x_1-l_0)^2+\tfrac{1}{2}k(x_3-x_2-l_0)^2 \qquad (1)$$

(όπου l_0 είναι το μήκος του ατέντωτου ελατηρίου), ενώ η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} M\dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_3^2 \qquad (2)$$

Υποθέτουμε ότι τα άτομα ταλαντούνται γύρω από τις θέσεις ισορροπίας τους (x_{10}, x_{20}, x_{30}), οπότε θεωρούμε τις μετατοπίσεις των ατόμων (η_1,η_2,η_3) από τις θέσεις αυτές ως εξής,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \eta_1, \\ x_2 &= x_{20} + \eta_2, \qquad (3) \\ x_3 &= x_{30} + \eta_3. \end{aligned}$$

όπου $x_{20}-x_{10} = l_0 = x_{30}-x_{20}$. Οι ενέργειες (1) και (2) γράφονται συναρτήσει των μετατοπίσεων η_i,

$$V = \tfrac{1}{2} k(\eta_2 - \eta_1)^2 + \tfrac{1}{2} k(\eta_3 - \eta_2)^2 \qquad (4a)$$

$$T = \tfrac{1}{2} m\,\dot{\eta}_1^2 + \tfrac{1}{2} M\,\dot{\eta}_2^2 + \tfrac{1}{2} m\,\dot{\eta}_3^2 \qquad (4b)$$

από τις οποίες υπολογίζουμε τους πίνακες της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας, αντίστοιχα,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει από την ορίζουσα

$$\left|\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right| = \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

η οποία οδηγεί στην εξίσωση,

$$(k-\omega^2 m)^2(2k-\omega^2 M) - 2k^2(k-\omega^2 m) = 0$$

ή

$$\omega^2(k-\omega^2 m)[\omega^2 mM - k(M+2m)] = 0 \qquad (7)$$

οι λύσεις της οποίας είναι

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

όπου $\mu = \dfrac{mM}{M+2m}$. Η ποσότης αυτή έχει διατάσεις μάζας και θα την λέμε **ανηγμένη μάζα**. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα πλάτη ταλάντωσης των ατόμων για καθεμιά συχνότητα.

(i) για $\omega=\omega_1=0$, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα πλάτη, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (12-11) την τιμή της συχνότητος, δηλ.

$$\begin{aligned}
&+(k-\omega_k^2 m)\, a_{1k} - k\, a_{2k} + 0 = 0\\
&-k\, a_{1k} + (2k-\omega_k^2 M) a_{2k} - k\, a_{3k} = 0\\
&+0 - k\, a_{2k} + (k-\omega_k^2 m)\, a_{3k} = 0
\end{aligned}$$

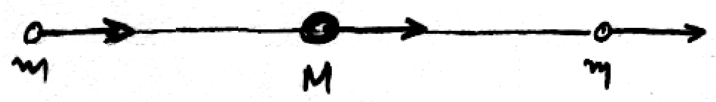
(ο δεύτερος δείκτης στις συνιστώσες a_{ik} του πλάτους αναφέρεται στη συχνότητα), για $\omega=\omega_1=0$ έχομε

$$\begin{aligned}
&+k\, a_{11} - k\, a_{21} + 0 = 0\\
&-k\, a_{11} + 2k\, a_{21} - k\, a_{31} = 0\\
&+0 - k\, a_{21} + k\, a_{31} = 0
\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνομε

$$\alpha_{11}=\alpha_{21}=\alpha_{31}. \qquad (8)$$

Προφανώς δεν υπάρχει ταλάντωση (εφόσον $\omega=0$). Η κίνηση αυτή αντιστοιχεί στην ομοιόμορφο μεταφορική κίνηση κατά μήκος του άξονα του μορίου, όπου όλα τα άτομα εκτελούν ακριβώς την ίδια κίνηση. Η κίνηση αυτή παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα.



Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", εξίσωση (12-14),

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jl} = \delta_{kl}.$$

Για $k=l=1$, έχομε,

$$T_{11}a_{11}a_{11} + T_{22}a_{21}a_{21} + T_{33}a_{31}a_{31} = 1$$

και σε συνδυασμό με την (8)

$$(2m+M)a_{11}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}$$

συνεπώς

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2m+M}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

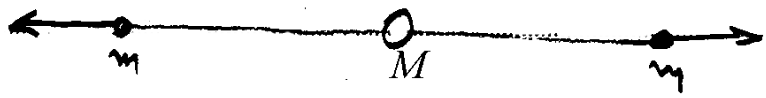
(ii) για $\omega=\omega_2=\sqrt{k/m}$, η εξίσωση (12-11) γράφεται

$$\begin{aligned}
&+0 - k\, a_{22} + 0 = 0\\
&-k\, a_{12} + 2k(1-\tfrac{M}{2m})\, a_{22} - k\, a_{32} = 0\\
&+0 - k\, a_{22} + 0 = 0
\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνομε

$$\alpha_{12}=-\alpha_{32} \ \text{και}\ \alpha_{22}=0. \qquad (9)$$

Αυτή η μορφή ταλάντωσης παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα.



Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14), για k=*l*=2, οπότε έχομε,

$$T_{11}a_{12}a_{12} + T_{33}a_{32}a_{32} = 1 \quad \Rightarrow \quad m\,a_{12}^2 + m\,a_{32}^2 = 1$$

και σε συνδυασμό με την (9)

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

συνεπώς

$$a_{12} = -a_{32} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \text{και}\ \alpha_{22}=0. \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) για $\omega=\omega_3 = \sqrt{k/\mu}$, η εξίσωση (12-11) γράφεται

$$\begin{aligned} &k(1-\tfrac{m}{\mu})a_{13} - k\,a_{23} + 0 = 0 \\ &-k\,a_{13} + k(2-\tfrac{M}{\mu})\,a_{23} - k\,a_{33} = 0 \\ &+0 - k\,a_{23} + k(1-\tfrac{m}{\mu})\,a_{33} = 0 \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνομε

$$\alpha_{13}=\alpha_{33} \ \text{και}\ a_{23}=-\tfrac{2m}{M}\,a_{13}. \qquad (10)$$

Αυτή η μορφή ταλάντωσης παρίσταται παραστατικά στο ακόλουθο σχήμα.

Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14), για k=*l*=3, οπότε έχομε,

$$T_{11}a_{13}a_{13} + T_{22}a_{23}a_{23} + T_{33}a_{33}a_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad m\,a_{13}^2 + M\,a_{23}^2 + m\,a_{33}^2 = 1$$

και σε συνδυασμό με την (10)

$$a_{13} = \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}}$$

συνεπώς

$$a_{13} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \quad \text{και } a_{23}=-\tfrac{2m}{M}a_{13} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2)$. Για να απλουστεύσουμε τις πράξεις, παίρνουμε M=2m, οπότε ο πίνακας **A**, παίρνει τη μορφή,

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα ισούται με det $\mathbf{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ακόμη θεωρήσαμε, m=1). Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Εισάγομε τώρα τις κανονικές συντεταγμένες (ζ_1,ζ_2,ζ_3), εξίσωση (12-32),

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

απ’ όπου έχομε,

$$\zeta_1 = \tfrac{1}{2}(\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3)$$
$$\zeta_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_3)$$
$$\zeta_3 = \tfrac{1}{2}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta_o$, τότε ενεργοποιείται μόνο η ζ_1-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_2=0=\zeta_3$), αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=-\eta_3=\eta_0$ και $\eta_2=0$, τότε ενεργοποιείται η ζ_2-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_1=0=\zeta_3$), και τέλος αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=-\eta_2=\eta_3=\eta_0$, τότε ενεργοποιείται η ζ_3-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_1=0=\zeta_3$)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.2:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$|\mathbf{T}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2-\lambda & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(7-\lambda)(2-\lambda)(3+\lambda)+30+30-3(2-\lambda)-50(7-\lambda)+6(3+\lambda)$$

$$= -(\lambda-4)(\lambda^2-2\lambda-80) = -(\lambda-4)(\lambda-10)(\lambda+8).$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του πίνακα **T** είναι: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=10$, και $\lambda_3=-8$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε καθεμιά ιδιοτιμή.

Για $\lambda=\lambda_1=4$, επιλύουμε την εξίσωση,

$$\mathbf{T}\cdot\vec{\mathbf{a}} = 0 \qquad (1)$$

όπου $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ είναι το διάνυσμα στήλης. Το σύστημα (1) γράφεται αναλυτικά,

$$\begin{aligned} &(7-4)a_1 + \sqrt{6}a_2 - \sqrt{3}a_3 = 0 \\ &+\sqrt{6}a_1 + (2-4)a_2 - 5\sqrt{2}a_3 = 0 \\ &-\sqrt{3}a_1 - 5\sqrt{2}a_2 - (3+4)a_3 = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Η λύση του συστήματος (2) είναι: $\dfrac{a_1}{a_3} = \sqrt{3}$, $\quad \dfrac{a_2}{a_3} = -\sqrt{2}$

και συνεπώς, το 3×1 ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=4$ είναι: $\vec{\mathbf{a}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$,

όπου το μέτρο του διανύσματος έχει νορμαλιστεί στη μονάδα.

Παρομοίως βρίσκουμε για $\lambda=\lambda_2=10$: $\vec{\mathbf{a}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ και για $\lambda=\lambda_3=-8$: $\vec{\mathbf{a}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$.

Ο 3×3 πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων **A** είναι

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα ισούται με det **A** =1. Ο αντίστροφος πίνακας υπολογίζεται,

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}.$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι πράγματι $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$. Υπολογίζουμε το γινόμενο των πινάκων,

$$\mathbf{ATA}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

δηλ. ο τανυστής **T** διαγωνοποιείται από τον μετασχηματισμό ομοιομορφίας (similarity transformation) $\mathbf{ATA}^{-1}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.3:

Δίδεται ότι δύο συζευγμένα εκκρεμή, η κινητική ενέργεια είναι,

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)\,,\qquad (1)$$

και η δυναμική ενέργεια ,

$$\mathrm{V}=\tfrac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2-2k\theta_1\theta_2)\,,\qquad (2)$$

όπου k μια σταθερά (θα μπορούσε να σας είχε ζητηθεί να αποδείξετε τις εκφράσεις αυτές). Προφανώς επιλέγουμε ως γενικευμένες συντεταγμένες τις μεταβλητές θ_1, θ_2. Όπως και στο πρώτο πρόβλημα, υπολογίζουμε από τις οποίες υπολογίζουμε τους πίνακες της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας, αντίστοιχα,

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}1 & -k\\ -k & 1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad (3)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής: $\eta_i=Ca_ie^{-i\omega t}$, οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης (12-9) παίρνουμε την εξίσωση που πληρούν τα πλάτη ταλάντωσης, εξίσωση (12-11),

$$\sum_{j=1}^{2}(V_{ij}-\omega^2T_{ij})\,a_j=0\,,\ \ i=1,2$$

ή αναλυτικά,

$$\begin{aligned}(V_{11}-\omega^2T_{11})a_1+(V_{12}-\omega^2T_{12})a_2&=0,\\ (V_{21}-\omega^2T_{21})a_1+(V_{22}-\omega^2T_{22})a_2&=0,\end{aligned}\qquad (4)$$

Για μη προφανείς λύσεις θα πρέπει,

$$\left|\mathbf{V}-\omega^2\mathbf{T}\right| = \begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -k \\ -k & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

η οποία οδηγεί στην εξίσωση,

$$(1-\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

της οποίας οι λύσεις είναι

$$\omega_1 = \sqrt{1-k}, \quad \omega_2 = \sqrt{1+k}$$

Υπολογίζουμε τα πλάτη ταλάντωσης των ατόμων για καθεμιά συχνότητα.

(ι) για $\omega = \omega_1 = \sqrt{1-k}$, αντικαθιστούμε στο σύστημα (4) και παίρνουμε,

$$\begin{aligned} +k\,a_{11} - k\,a_{21} &= 0 \\ -k\,a_{11} + k\,a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνομε $\alpha_{11}=\alpha_{21}$. Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14),

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jl} = \delta_{kl}$$

όπου $T_{ij}=\delta_{ij}$, Έχομε λοιπόν,

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$$

άρα

$$a_{11} = a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Αυτή η μορφή ταλάντωση παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα (ίσα πλάτη ταλάντωσης εν φάσει). Τα δύο εκκρεμή συμπεριφέρονται σαν ένα εκκρεμές που ταλαντούνται με συχνότητα ω_1.

(ιι) για $\omega = \omega_2 = \sqrt{1+k}$, αντικαθιστούμε στο σύστημα (4) και παίρνουμε,

$$\begin{aligned} -k\,a_{12} - k\,a_{22} &= 0 \\ -k\,a_{12} - k\,a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

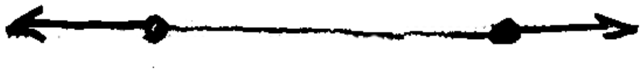
απ' όπου παίρνομε $\alpha_{12}=-\alpha_{22}$. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14),

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

άρα

$$a_{12} = -a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτή η μορφή ταλάντωση παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα. Τα δύο εκκρεμή ταλαντούνται με συχνότητα ω_2 με ίσα πλάτη ταλάντωσης, αλλά με διαφορά φάσης 180°.



Ο 2×2 πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων **A** είναι

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα ισούται με det **A** =1. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$) Εισάγομε τώρα τις κανονικές συντεταγμένες (ζ_1,ζ_2), εξίσωση (12-32),

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

απ' όπου έχομε,

$$\zeta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\theta_2 + \theta_1)$$
$$\zeta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\theta_2 - \theta_1)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\theta_1=\theta_2=\theta_o$, τότε ενεργοποιείται μόνο η ζ_1-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_2=0$), ενώ αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\theta_1=-\theta_2=\theta_o$, τότε ενεργοποιείται η ζ_2-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_1=0$).

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 4: Ημερομηνίας παράδοσης: 9-5-2005

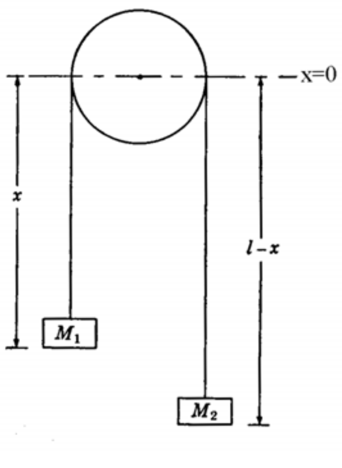
4. Στο παρακάτω Σχήμα 4.2 απεικονίζεται μια αβαρής τροχαλία. Στα δύο άκρα του (επίσης αβαρούς) νήματος της τροχαλίας έχουν εξαρτηθεί δύο μάζες M_1 και M_2, αντίστοιχα. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων. Γράψετε την συνάρτηση Hamilton και τις εξισώσεις κίνησης των σωμάτων. (Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που στο σύστημα έχομε 4 σώματα, δηλ. τις δύο μάζες, το νήμα, και τη τροχαλία, εν τούτοις απαιτείται μία μόνο συντεταγμένη, η x του σχήματος για προσδιοριστεί πλήρως η κατάσταση του συστήματος. Τούτο ερμηνεύεται ως εξής: κατά πρώτον τα δύο τελευταία σώματα ως “αβαρή” αποκλείονται περαιτέρω συζήτησης, όμως οι 2 μάζες έπρεπε να χαρακτηρίζονται από τις συντεταγμένες τους x_1 και x_2, αντίστοιχα. Επειδή όμως υπάρχει ένας **σύνδεσμος** (constraint) μεταξύ τους, δηλ. το νήμα της τροχαλίας που τα συνδέει, ο οποίος εκφράζεται από τη μαθηματική σχέση: $x_1 + x_2 = l$, ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών μειώνεται από δύο σε ένα).

5. (Πρόβλημα 13-3 του Kibble, τροποποιημένο). Στο Σχήμα 4.3 απεικονίζεται μια αβαρής τροχαλία. Στο ένα άκρο του (επίσης αβαρούς) νήματος της τροχαλίας έχει εξαρτηθεί μάζα 2m, ενώ στο άλλο μάζα m, στην οποία έχει προσδεθεί το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί μια τρίτη μάζα m. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων. Γράψετε την συνάρτηση Hamilton χρησιμοποιώντας ως γενικευμένες συντεταγμένες τις x_1 και x_2. Αν το σύστημα ξεκινήσει από την ηρεμία και με ατέντωτο ελατήριο, βρείτε τις θέσεις των σωμάτων συναρτήσει του t.

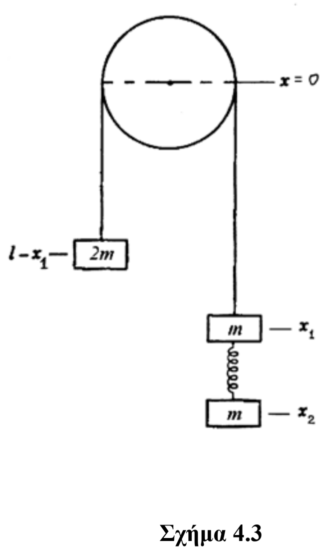
6. Βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες οι εξισώσεις

$$Q = q^{\alpha} \cos\beta p, \qquad P = q^{\alpha} \sin\beta p,$$

παριστούν κανονικό μετασχηματισμό. Ποιά είναι η μορφή της γεννήτριας συνάρτησης F(p,Q,t) στη περίπτωση αυτή;



Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.3

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 4:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.1:
Το σύστημα είναι συντηρητικό. Η συντεταγμένη μόνο της μιας μάζας είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, εφόσον υφίσταται ένας σύνδεσμος, όπως περιγράφεται στην εκφώνηση. Η δυναμική ενέργεια με στάθμη αναφοράς το επίπεδο που περνά από το κέντρο της τροχαλίας είναι,

$$V = -M_1 g x - M_2 g(l - x)$$

ενώ η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\,\dot{x}^2 .$$

Συνεπώς η Lagrangian είναι:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2)\,\dot{x}^2 + (M_1 - M_2) g\, x + M_2 g\, l$$

και η συζυγής ορμή, $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\,\dot{x}$, και συνεπώς $\dot{x} = p/(M_1 + M_2)$. Συνεπώς, η χαμιλτονιανή θα έχει τη μορφή,

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2(M_1 + M_2)} - (M_1 - M_2) g\, x - M_2 g\, l$$

Οι εξισώσεις Hamilton είναι,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M_1 + M_2},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (M_1 - M_2) g .$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν τη γνωστή μορφή χρησιμοποιώντας πιο ταπεινά μέσα (νόμο Νεύτωνα).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.2:
Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, η δυναμική ενέργεια με στάθμη αναφοράς το επίπεδο που περνά από το κέντρο της τροχαλίας είναι,

$$V = -2mg(l - x_1) - mgx_1 - mgx_2 + \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2 = -2mgl - mg(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

όπου l_0 είναι το ατέντωτο μήκος του ελατηρίου. Ακόμη η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2} 2m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 = \tfrac{3}{2} m\,\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 .$$

Συνεπώς η Lagrangian είναι:

$$L = T - V = \tfrac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + 2mgl + mg(x_2 - x_1) - \tfrac{1}{2} k(x_2 - x_1 - l_0)^2 \quad (1)$$

απ' όπου υπολογίζουμε τις συζυγείς ορμές,

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 3m\dot{x}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2,$$

και συνεπώς $\dot{x}_1 = p_1 / 3m, \quad \dot{x}_2 = p_2 / m$. Τότε η χαμιλτονιανή απαλείφοντας τις ταχύτητες αυτές θα έχει τη μορφή,

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \frac{p_1^2}{6m} + \frac{p_2^2}{2m} - 2mgl - mg(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2} k(x_2 - x_1 - l_0)^2 \quad (2)$$

Οι εξισώσεις Hamilton είναι,

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{3m}, \qquad (3α)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m}, \qquad (3β)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -mg + k(x_2 - x_1 - l_0) \qquad (3γ)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = mg - k(x_2 - x_1 - l_0) \qquad (3δ)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3γ) και (3δ) παίρνομε: $\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0$, άρα $p_1+p_2=A$: σταθερά. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες για t=0, $p_1=p_2=0$, έπεται: A=0, συνεπώς

$$p_1 = -p_2. \qquad (4)$$

Εισάγοντας τις ταχύτητες από τις (3α), (3β) στη (4), παίρνουμε,

$$3m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = 0,$$

η οποία ολοκληρούμενη δίδει: $3x_1 + x_2 = B$: σταθερά. Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες για t=0, $x_1=x_0$ και $x_2= x_0 + l_0$ (x_0 είναι κάποια αυθαίρετη αρχική θέση), έπεται: $B = 4x_0+ l_0$. Συνεπώς

$$3x_1 + x_2 = 4x_0 + l_0. \qquad (5)$$

Διαιρούμε την (3γ) δια 3m και την (3δ) δια m, αφαιρούμε μετά κατά μέλη, και αντικαθιστώντας τις ορμές από τις συντεταγμένες (3α) και (3β) καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \tfrac{4}{3} g - \frac{4k}{3m}(x_2 - x_1 - l_0) \qquad (6)$$

Θέτω $y = x_2-x_1-l_0$, οπότε η (6) γράφεται

$$\ddot{y} = \tfrac{4}{3} g - \frac{4k}{3m} y = -\frac{4k}{3m}\left(y - \frac{mg}{k}\right) \qquad (7)$$

Ακόμη, αντικαθιστώντας $(y-\frac{mg}{k})\to z$, η (7) γράφεται,

$$\ddot{z}=-\frac{4k}{3m}z\,,$$

η οποία παριστάνει εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης με τη γνωστή μας λύση,

$$z = A\cos(\omega t+\varphi),$$

όπου $\omega^2=\frac{4k}{3m}$ η συχνότητα ταλάντωσης. Επανακάμπτουμε πίσω στις μεταβλητές x_1, x_2

$$x_2-x_1=l_0+\frac{mg}{k}+A\cos(\omega t+\varphi)\,. \qquad (8)$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στην (8): για t=0, $x_1=x_0$ και $x_2=x_0+l_0$ (x_0 είναι κάποια αυθαίρετη αρχική θέση), η (8) δίδει: $A\cos\varphi=-\frac{mg}{k}$. Ακόμη, παραγωγίζοντας την (8) παίρνουμε,

$$\dot{x}_2-\dot{x}_1=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\,.$$

Για t=0, $\dot{x}_2=\dot{x}_1=0$, η προηγούμενη σχέση δίδει φ=0. Συνεπώς, $A=-\frac{mg}{k}$ και η (8) γράφεται

$$x_2-x_1=l_0+\frac{mg}{k}(1-\cos\omega t) \qquad (9)$$

Τελικά, οι (5) και (9) λύνονται ως προς x_1, x_2 και δίδουν (για $\omega^2=\frac{4k}{3m}$),

$$x_1=x_0-\frac{mg}{4k}(1-\cos\omega t),$$

$$x_2=x_0+l_0+\frac{mg}{4k}(1-\cos\omega t).$$

(Για να έχουμε τις ίδιες απαντήσεις με εκείνες της σελίδος 280 του Kibble, πρέπει να γίνει η αντιστοίχιση: $x\to x_1$ και $y\to x_2-x_0-l_0$).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.3:

Υπολογίζουμε την αγκύλη Poisson,

$$[Q,P]=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=\alpha\beta\, q^{2\alpha-1}\,.$$

Για να είναι ο μετασχηματισμός (q,p)→ (Q,P) κανονικός θα πρέπει η αγκύλη Poisson να ισούται με τη μονάδα, δηλ. [Q,P]=1. Έπεται λοιπόν,

$$\alpha\beta\, q^{2\alpha-1}=1, \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c}\alpha\beta=1\\ 2\alpha-1=0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \ \alpha=1/2,\ \beta=2.$$

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 5: Ημερομηνίας παράδοσης:

1. Σώμα μάζας m κινείται μέσα σε απωστικό πεδίο $V=r^{\alpha}$, $-2<\alpha<\infty$. Να ευρεθεί η τιμή του α για την οποίαν η τροχιά του σώματος είναι κυκλική.

2. Σώμα κινείται σε ελλειπτική τροχιά μέσα σε πεδίο δυνάμεων αντιστρόφου τετραγώνου. (α) Βρείτε την μεγίστη και την ελαχίστη γωνιακή ταχύτητα του σώματος. (β) Αν ο λόγος της μεγίστης προς την ελαχίστη γωνιακή ταχύτητα είναι η, δείξετε ότι η εκκεντρότης της τροχιάς ισούται με : $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\eta}-1}{\sqrt{\eta}+1}$.

3. Υπολογίσετε προσεγγιστικά το λόγο των μαζών του Ηλίου προς της Γης, χρησιμοποιώντας μόνο τις διάρκειες του έτους (365 μέρες) και του Σεληνιακού μήνα (27.3 μέρες) και τις μέσες ακτίνες της τροχιάς της Γης (1.49×10^{8} Km) και της τροχιάς της Σελήνης (3.8×10^{5} Km).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 5:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.1:

Δίδεται ότι $V=r^{\alpha}$, $-2<\alpha<\infty$. Έχομε βρει ότι η ενέργεια του σώματος μπορεί να γραφεί ως,

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r})^2 = E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \geq 0 \qquad (1)$$

Για να έχομε κυκλική τροχιά θα πρέπει η ακτινική ταχύτης να μηδενίζεται, δηλ. $\dot{r}=0$, συνεπώς από την (1) έχομε,

$$E - r^{\alpha} - \frac{l^2}{2mr^2} = 0$$

ή

$$Er^2 = r^{2+\alpha} + \frac{l^2}{2m}$$

Για $r\to0$, θα πρέπει το πρώτο μέρος $Er^2\to0$, συνεπώς θα πρέπει $r^{2+\alpha}\to0$, άρα $(2+\alpha)\geq0$, ή $-2\leq\alpha$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.2:

Στη περίπτωση της ελλειπτικής τροχιάς ενός πλανήτη, η ταχύτητα σάρωσης $\dfrac{dA}{dt}$ της επιβατικής ακτίνας στα σημεία 1 και 2 της τροχιάς του πλανήτη είναι ίση (σύμφωνα με τον 2^{o} νόμο του Kepler), δηλ.

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1 = \tfrac{1}{2} r_2^2 \dot{\theta}_2 . \quad (1)$$

Αν πάρουμε σαν σημεία 1 και 2 τα δύο αψιδικά σημεία (περιήλιο και αφήλιο, βλέπε Σχήμα 4.4), τότε από την (1) παίρνομε για $\dot{\theta} = \omega$, $r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$, ή

$$\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \eta ,$$

άρα

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\eta} . \qquad (2)$$

Θεωρούμε την εξίσωση της τροχιάς, (4-27),

$$\frac{1}{r} = C(1 + \varepsilon \cos\theta)$$

Για ευκολία μας παίρνουμε θ′=0 (Σχήμα 4.4), οπότε έχομε,

για θ=0: $\quad \frac{1}{r_1} = C(1 + \varepsilon)$,

και για θ=π: $\quad \frac{1}{r_2} = C(1 - \varepsilon)$,

από τις οποίες λαμβάνουμε,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\eta} - 1}{\sqrt{\eta} + 1} ,$$

που είναι η ζητούμενη σχέση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.3:

Εφαρμόζουμε τον 3^{o} νόμο του Kepler για τη τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο και της τροχιάς της Σελήνης γύρω από την Γη,

$$T_E^2 = 4\pi^2 \frac{a_E^3}{G(M_S + M_E)} \cong 4\pi^2 \frac{a_E^3}{GM_S} \qquad (1)$$

και

$$T_M^2 = 4\pi^2 \frac{a_M^3}{G(M_E + M_M)} \cong 4\pi^2 \frac{a_M^3}{GM_E} . \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνομε,

$$\left(\frac{T_E}{T_M}\right)^2 = \left(\frac{a_E}{a_M}\right)^3 \cdot \frac{M_E}{M_S} ,$$

άρα,

$$\frac{M_S}{M_E} = \left(\frac{a_E}{a_M}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^2 ,$$

ή

$$\frac{M_S}{M_E} = \left(\frac{1.49\times 10^8}{3.8\times 10^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{27.3}{365}\right)^2 = 3.37247\times 10^5 .$$

Από τον πίνακες "The Earth as a Planet", by G.P. Kviper, βρίσκουμε, $\frac{M_S}{M_E} = 3.33422\times 10^5$.

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 6: Ημερομηνίας παράδοσης:

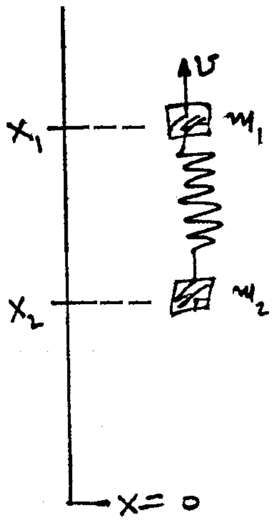
1. (Πρόβλημα 7-3 του Kibble, τροποποιημένο) Δύο σώματα με μάζας m_1 και m_2 προσαρμόζονται στα άκρα ενός ελατηρίου, σταθεράς k και φυσικού μήκους l_o. Αρχικά το σύστημα ηρεμεί κατακόρυφα με το σώμα m_1 πάνω από το σώμα m_2 σε ύψος l_o. Στη χρονική στιγμή t=0, η μάζα m_1 βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o. Βρείτε τις θέσεις των σωμάτων στη χρονική στιγμή t.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 6:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.1:

Θεωρούμε το σύστημα στο Σχήμα 1 όπως ανέρχεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Έστω x_1 και x_2 οι θέσεις των δύο σωμάτων σε τυχούσα χρονική στιγμή t. Επιλέγουμε την κατακόρυφο σαν άξονα x.

Σχήμα 1



Η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 \qquad (1)$$

και η δυναμική ενέργεια

$$V = m_1 g\, x_1 + m_2 g\, x_2 + \tfrac{1}{2} k\, (x_1 - x_2 - l_o)^2 \qquad (2)$$

όπου έχουμε πάρει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια ίση με mgx, ως προς τη στάθμη αναφοράς του σχήματος. Οπότε η Langrangian του συστήματος είναι,

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2)^2 - m_1 g\, x_1 - m_2 g\, x_2 - \tfrac{1}{2} k\, (x_1 - x_2 - l_o)^2 \qquad (3)$$

Από την (3) υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -m_1 g - k\,(x_1 - x_2 - l_o),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -m_2 g + k\,(x_1 - x_2 - l_o),$$

συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k}$ γράφονται,

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g - k\,(x_1 - x_2 - l_o), \qquad (4\alpha)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g + k\,(x_1 - x_2 - l_o). \qquad (4\beta)$$

Επιλύουμε στη συνέχεια το σύστημα των εξισώσεων (4). Αν προσθέσουμε κατά μέλη, παίρνουμε

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -(m_1 + m_2) g\,. \qquad (5)$$

Εισάγουμε τη συντεταγμένη του κέντρου μάζας: $X = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$, όπου $M=m_1+m_2$, στην (5), οπότε παίρνουμε,

$$M\ddot{X} = -Mg\,,$$

η λύση της οποίας είναι,

$$X = \alpha + \beta t - \tfrac{1}{2} g t^2. \qquad (6)$$

όπου α, β σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες για $t=0$, $x_1=l_o$, $x_2=0$ (δηλ. $X = \frac{m_1}{M} l_o$), και $\dot{x}_1 = \upsilon_o$, $\dot{x}_2 = 0$ (δηλ. $\dot{X} = \frac{m_1}{M}\upsilon_o$) στη λύση (6), υπολογίζουμε τις σταθερές α, β:

$$\alpha = l_o m_1/M, \;\; \text{και} \;\; \beta = \upsilon_o m_1/M,$$

οπότε η λύση (6) γράφεται,

$$MX = m_1 l_o + m_1 \upsilon_o t - \tfrac{1}{2} M g t^2\,,$$

ή

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 l_o + m_1 \upsilon_o t - \tfrac{1}{2} M g t^2, \qquad (7)$$

δηλ. το κέντρο μάζας εκτελεί (σαν ένα σώμα) κατακόρυφο βολή προς τα άνω. Ακόμη, αν διαιρέσουμε την (4α) με m_1 και την (4β) με m_2 και στη συνέχεια αφαιρέσουμε κατά μέλη παίρνουμε,

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{k}{\mu}(x_1 - x_2 - l_o), \qquad (8)$$

όπου $\mu=m_1 m_2/(m_1+m_2)$. Εισάγουμε τη μεταβλητή $Y= x_1 - x_2 - l_o$, οπότε η (8) γράφεται,

$$\ddot{Y} = -\frac{k}{\mu} Y. \qquad (9)$$

Προφανώς η (9) παριστάνει αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, η λύση της οποίας είναι

$$Y = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (10)$$

όπου Α,φ σταθερές. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες για t=0, $x_1 = l_o$, $x_2 = 0$ (οπότε Y=0), και $\dot{x}_1 = \upsilon_o$, $\dot{x}_2 = 0$ (οπότε $\dot{Y} = \upsilon_o$) στη λύση (10), υπολογίζουμε τις σταθερές Α,φ:

$$\varphi = \pi/2 \quad \text{και} \quad A = -\upsilon_o/\omega,$$

συνεπώς η λύση (10) γράφεται,

$$x_1 - x_2 - l_o = \frac{\upsilon_o}{\omega}\sin\omega t. \qquad (11)$$

Τώρα από το σύστημα (7) και (11) υπολογίζουμε τις συντεταγμένες x_1, x_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_1}{M}\upsilon_o t - \tfrac{1}{2}gt^2 + \frac{m_2}{M}\frac{\upsilon_o}{\omega}\sin\omega t + l_o, \\ x_2 &= \frac{m_1}{M}\upsilon_o t - \tfrac{1}{2}gt^2 - \frac{m_1}{M}\frac{\upsilon_o}{\omega}\sin\omega t. \end{aligned} \qquad (12)$$

Παρατηρούμε ότι για t=0, επαληθεύονται οι αρχικές συνθήκες: $x_1 = l_o$, $x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = \upsilon_o$, $\dot{x}_2 = 0$. Αφαιρώντας ακόμη κατά μέλη τις (12) παίρνουμε,

$$x_1 - x_2 = \frac{\upsilon_o}{\omega}\sin\omega t + l_o,$$

η οποία περιγράφει τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων (καθαρά αρμονική ταλάντωση), η οποία είναι ανεξάρτητη από τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας.