Department of Applied Mathematics

ΜΑΘΗΜΑ: ***ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ***

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005

ΠΡΟΟΔΟΣ

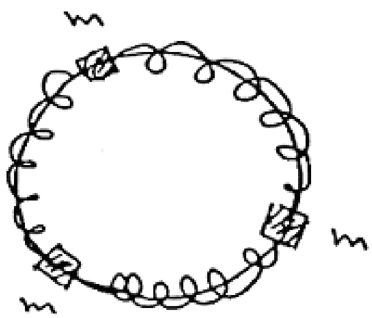
Διδάσκων: Καθηγητής Μ. Βελγάκης

Ηράκλειο, 16-5-2005

ΟΔΗΓΙΕΣ: Μπορείτε να χρησιμοποιείτε σαν πρόχειρο οποιαδήποτε σελίδα της κόλλας της, αρκεί να αναγράφετε στη κορυφή της σελίδας τη λέξη **ΠΡΟΧΕΙΡΟ**. Να απαντηθούν όλα θέματα, τα οποία είναι ισοδύναμα. **Καλή επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1 [5 μονάδες].

Τρεις μάζες $m_1=m_2=m_3=m$ συνδέονται με όμοια ελατήρια σταθεράς k όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κίνηση λαμβάνει χώρα μόνο κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου, ακτίνος α. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες, τα ιδιοδιανύσματα, και τις κανονικές μορφές ταλάντωσης του συστήματος των συζευγμένων μαζών για μικρές ταλαντώσεις κοντά στη θέση ισορροπίας τους. Δώσατε και μια φυσική εικόνα για κάθε κανονική μορφή ταλάντωσης.



ΘΕΜΑ 2 [5 μονάδες]

Η αλληλεπίδραση μεταξύ ατόμων μέσα σε μια κατηγορία στερεών σωμάτων περιγράφεται από την ακόλουθη δυναμική ενέργεια ,

$$V(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}} \qquad (1)$$

όπου a,b είναι θετικές σταθερές, και r είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων. Το δυναμικό (1) είναι γνωστό σαν δυναμικό Lennard-Jones.

(α) Υπολογίσετε την ασκούμενη δύναμη μεταξύ των ατόμων

(β) Υποθέτοντας ότι το ένα άτομο είναι πολύ βαρύ και παραμένει ακίνητο ενώ το άλλο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής, περιγράψετε τις πιθανές κινήσεις του δευτέρου ατόμου.

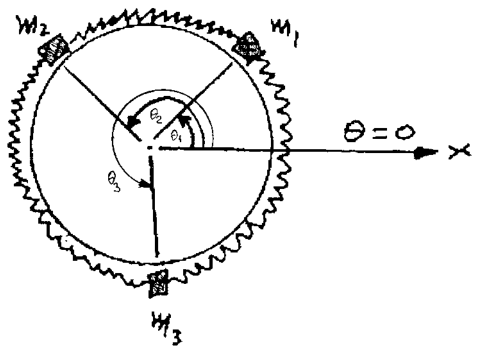
(γ) Βρείτε την απόσταση ισορροπίας και τη συχνότητα για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας, αν m είναι η μάζα του ελαφρύτερου ατόμου [απ.: $\omega=3(4a^7/m^3b^4)^{1/6}$]

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ 1:

Έστω οι τρεις συζευγμένες μάζες του Σχήματος 1. Έστω $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ οι γωνίες των τριών μαζών (ως προς τον άξονα x). Στη θέση ισορροπίας τους, έχομε: $\theta_{20}-\theta_{10}=\theta_{30}-\theta_{20}=\theta_{10}+2\pi-\theta_{30}=2\pi/3$ (εννοείται $+\mathrm{mod}(\Delta\theta_0,\pi)$).

Σχήμα 1



Η κινητική ενέργεια του μορίου είναι

$$T=\tfrac{1}{2}m(\alpha\dot\theta_1)^2+\tfrac{1}{2}m(\alpha\dot\theta_2)^2+\tfrac{1}{2}m(\alpha\dot\theta_3)^2=\tfrac{1}{2}m\alpha^2(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+\dot\theta_3^2)\,. \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας, κατ' αρχήν η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου που συνδέει τις μάζες j και j+1 είναι

$$\delta s=\alpha\,[(\theta_{j+1}-\theta_j)-2\pi/3]$$

οπότε η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο που συνδέει τις μάζες j και j+1 είναι, $V=\tfrac{1}{2}k(\delta s)^2=\tfrac{1}{2}k\alpha^2[(\theta_{j+1}-\theta_j)-2\pi/3]^2$, συνεπώς η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$V=\tfrac{1}{2}k\alpha^2\Big([(\theta_2-\theta_1)-2\pi/3]^2+[(\theta_3-\theta_2)-2\pi/3]^2+[(\theta_1-\theta_3)-2\pi/3]^2\Big) \qquad (2)$$

Αντί των γωνιών $(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ θεωρούμε τις μετατοπίσεις των μαζών (η_1,η_2,η_3) από τις θέσεις ισορροπίας τους,

$$\begin{aligned}\theta_1&=\theta_{10}+\eta_1,\\ \theta_2&=\theta_{20}+\eta_2,\\ \theta_3&=\theta_{30}+\eta_3,\end{aligned} \qquad (3)$$

οπότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται,

$$T=\tfrac{1}{2}m\alpha^2(\dot\eta_1^2+\dot\eta_2^2+\dot\eta_3^2)\,, \qquad (4)$$

και η δυναμική ενέργεια είναι,

$$V = \tfrac{1}{2} k\alpha^2 \left((\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 \right). \qquad (6)$$

Λαμβάνουμε τις μεταβλητές (η_1,η_2,η_3) σαν γενικευμένες συντεταγμένες και υπολογίζουμε τους πίνακες της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας,

$$\mathbf{V} = k\alpha^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{T} = m\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$\left| \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T} \right| = \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & -k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 . \qquad (8)$$

όπου θέσαμε για ευκολία μας α^2=1 (αν και αυτή η υπόθεση δεν χρειάζεται, διότι απλοποιείται ως κοινός παράγοντας). Συνεπώς η εξίσωση των ιδιοτιμών ω είναι,

$$(2k - \omega^2 m)^3 - 2k^3 - 3k^2 (2k - \omega^2 m) = 0$$

και θέτοντας $\omega_o^2 = k / m$, η εξίσωση αυτή γράφεται,

$$(2\omega_o^2 - \omega^2)^3 - 2\omega_o^6 - 3\omega_o^4 (2\omega_o^2 - \omega^2) = 0$$

η οποία μετά από αναγωγές γράφεται,

$$\omega^2 (\omega^2 - 3\omega_o^2)^2 = 0 . \qquad (9)$$

Οι λύσεις της (9) είναι

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{3}\omega_o, \quad \omega_3 = \sqrt{3}\omega_o$$

δηλ. υπάρχει μια διπλή ρίζα ω_2=ω_3=$\sqrt{3}\,\omega_o$. Λέμε τότε ότι οι μορφές ταλάντωσης που αντιστοιχούν στις συχνότητες αυτές είναι **εκφυλισμένες** (degenerate). Υπολογίζουμε τα πλάτη ταλάντωσης των σωμάτων για καθεμιά συχνότητα ξεχωριστά, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (12-11) την τιμή της αντίστοιχης συχνότητος ω_k, δηλ.

$$\begin{aligned} &+ (2k - \omega_k^2 m)\, a_{1k} - k\, a_{2k} - k\, a_{3k} = 0 \\ &- k\, a_{1k} + (2k - \omega_k^2 M) a_{2k} - k\, a_{3k} = 0 \\ &- k\, a_{1k} - k\, a_{2k} + (2k - \omega_k^2 m)\, a_{3k} = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

όπου το διάνυσμα του πλάτους $\vec{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}, a_{3k})$ αναφέρεται στη συχνότητα ω_k.

(ι) οπότε για $\omega=\omega_1=0$, η (10) γράφεται,

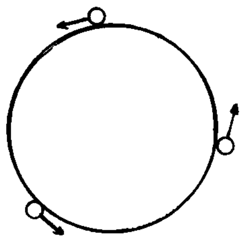
$$\begin{aligned} 2k\,a_{11} - k\,a_{21} - k\,a_{31} &= 0 \\ -k\,a_{11} + 2k\,a_{21} - k\,a_{31} &= 0 \\ -k\,a_{11} - k\,a_{21} + 2k\,a_{31} &= 0 \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνομε

$$a_{11} = a_{21} = a_{31}. \qquad (11)$$

Προφανώς δεν υπάρχει ταλάντωση (εφόσον ω=0). Η κίνηση αυτή αντιστοιχεί στην ομοιόμορφο περιστροφική κίνηση του συστήματος, όπου όλα τα σώματα εκτελούν ακριβώς την ίδια κίνηση. Η κίνηση αυτή παρίσταται στο ακόλουθο Σχήμα 2.

Σχήμα 2



Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14),

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jl} = \delta_{kl}$$

η οποία για $k=l=1$ γράφεται,

$$T_{11}a_{11}a_{11} + T_{22}a_{21}a_{21} + T_{33}a_{31}a_{31} = 1$$

η οποία σε συνδυασμό με την (11) γράφεται,

$$3m\,a_{11}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{3m}}$$

συνεπώς

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \quad \text{ή} \quad \vec{\mathbf{a}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(ιι) για $\omega=\omega_2=\omega_3=\sqrt{3k/m}$, η (10) δίδει δύο ανεξάρτητες εξισώσεις,

$$\begin{aligned} a_{12} + a_{22} + a_{32} &= 0, \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} &= 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Η συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14), εφαρμοζόμενη για k=2 και l=3, οδηγεί στην εξίσωση,

$$T_{11}a_{12}a_{13} + T_{22}a_{22}a_{23} + T_{33}a_{32}a_{33} = 0$$

ή

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. \qquad (13)$$

Ομοίως η ίδια συνθήκη εφαρμοζόμενη για k=l=2, και για k=l=3 οδηγεί στις εξισώσεις,

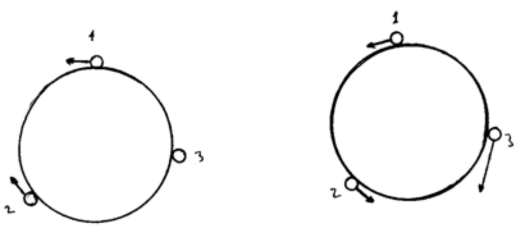
$$\begin{aligned} a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= \frac{1}{m}, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= \frac{1}{m}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Οι πέντε εξισώσεις (12)-(14) δεν αρκούν για τον υπολογισμό 6 αγνώστων. Η απροσδιοριστία αυτή των ιδιοδιανυσμάτων οφείλεται στη διπλή ιδιοτιμή. Οπότε οδηγούμαστε σε κάποια αυθαιρεσία στον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων $\vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$, υπό τον όρο να ικανοποιούνται οι ισχύουσες συνθήκες ορθοκανονικότητος. Μπορούμε να θέσουμε αυθαίρετα a_{32}=0, οπότε βρίσκουμε,

$$\vec{\mathbf{a}}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{a}}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Η κίνηση που αντιστοιχεί στο πλάτος $\vec{a}_2$ παριστάνει δύο σώματα να ταλαντούνται με το ίδιο πλάτος αλλά με διαφορά φάσης 180^o και με το τρίτο ακίνητο, ενώ η $\vec{a}_3$ παριστάνει δύο σώματα ταλαντούμενα εν φάσει με το ίδιο πλάτος και με το τρίτο σώμα ταλαντούμενο με διαφορά φάσης 180^o αλλά με διπλάσιο πλάτος. Οι κινήσεις αυτές παρίστανται στο ακόλουθο Σχήμα 3.

Σχήμα 3



Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα ιδιοδιανύσματα $\vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$ που δίδονται από την (15) είναι ένα σετ ιδιοδιανυσμάτων από ένα απειροσύνολο ιδιοδιανυσμάτων που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2)$. Για να απλουστεύσουμε τις πράξεις θέτουμε m=1, οπότε ο πίνακας **A** γράφεται,

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα ισούται με det $\mathbf{A} = 1$. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Εισάγομε τώρα τις κανονικές συντεταγμένες (ζ_1,ζ_2,ζ_3), εξίσωση (12-32),

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

απ' όπου έπεται,

$$\zeta_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$
$$\zeta_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2)$$
$$\zeta_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta_o$, τότε ενεργοποιείται μόνο η ζ_1-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_2=0=\zeta_3$), αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=-\eta_2=\eta_0$ και $\eta_3=0$, τότε ενεργοποιείται η ζ_2-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_1=0=\zeta_3$), και τέλος αν οι αρχικές συνθήκες είναι: $\eta_1=\eta_2=-\tfrac{1}{2}\eta_3=\eta_0$, τότε ενεργοποιείται η ζ_3-μορφή ταλάντωσης (εφόσον $\zeta_1=0=\zeta_3$).

ΘΕΜΑ 2:

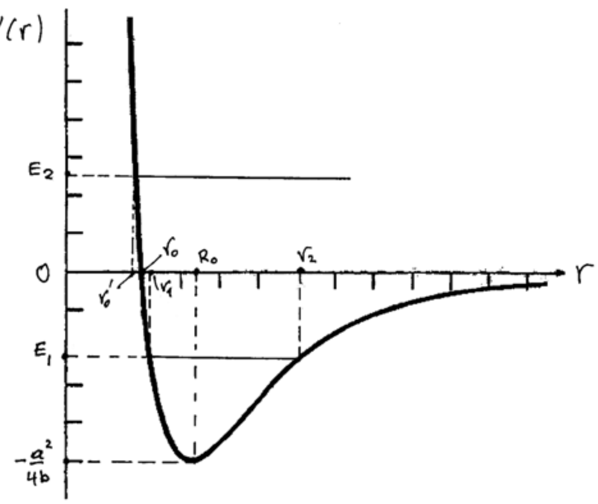
(α) Η ασκούμενη δύναμη μεταξύ των δύο ατόμων είναι

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{6a}{r^7} + \frac{12b}{r^{13}}$$

όπου r είναι η μεταξύ των ατόμων απόσταση.

(β) Θεωρούμε ότι το ένα άτομο είναι πολύ βαρύ και παραμένει ακίνητο, το οποίο λαμβάνουμε σαν αρχή των αξόνων 0. Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας απεικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα 4. Η δυναμική ενέργεια μηδενίζεται στις ρίζες της εξίσωσης: V(r)=0, δηλ. στο σημείο $r_o=(b/a)^{1/6}$. Επίσης, η δυναμική ενέργεια έχει ακρότατο στη ρίζα της εξίσωσης: V′(r)=0, δηλ. στο σημείο $R_o=(2b/a)^{1/6}$. Μάλιστα η δεύτερη παράγωγος της δυναμικής ενέργειας στο σημείο R_o ισούται με $V''(R_o)=9(4a^7/b^4)^{1/3}>0$, ενώ η τιμή της δυναμικής ενέργειας είναι $V(R_o)=-a^2/4b$. Ακόμη παρατηρούμε ότι για $r\to\infty$, η δυναμική ενέργεια $V(r)\to 0$.

Σχήμα 4



Οπότε προκύπτουν οι εξής δύο ενεργειακές περιοχές:

(ι) για $E=E_2\geq 0$, το άτομο πλησιάζει το βαρύτερο άτομο μέχρι μιας ελαχίστης απόσταση r'_o και στη συνέχεια ανακλάται προς το άπειρο,

(ιι) για $E=E_1$, όπου $-a^2/4b<E_1<0$, το ελαφρύτερο άτομο ταλαντούται μεταξύ των ορίων r_1 και r_2. Θα βρούμε την εξίσωση κίνησής του κοντά στο πυθμένα του φρεατίου R_o, απ' όπου θα προκύψει η συχνότητα ταλάντωσης. Αναπτύσσουμε την V(r) κοντά στο πυθμένα του φρεατίου R_o,

$$V(R_o+\eta) = V(R_o) + \eta\, V'(R_o) + \frac{\eta^2}{2}\, V''(R_o) + \ldots$$

ή

$$V(\eta) = -\frac{a^2}{4b} + \tfrac{9}{2}\left(\frac{4a^7}{b^4}\right)^{1/3}\eta^2 + \ldots.$$

Οπότε η δύναμη που ασκείται στο ελαφρύτερο άτομο είναι

$$F(\eta) = -\frac{dV}{d\eta} = -9\left(\frac{4a^7}{b^4}\right)^{1/3}\eta$$

επομένως η εξίσωση κίνησης του ατόμου είναι

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = -9(\frac{4a^7}{b^4})^{1/3}\eta$$

ή

$$\ddot{\eta} + \frac{9}{m}(\frac{4a^7}{b^4})^{1/3}\eta = 0\ .$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει μια αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = 3(\frac{4a^7}{m^3b^4})^{1/6}$.

ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: ***ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ***
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005

Διδάσκων: Καθηγητής Μ. Βελγάκης Ηράκλειο, 27-6-2005

ΟΔΗΓΙΕΣ: Μπορείτε να χρησιμοποιείτε σαν πρόχειρο οποιαδήποτε σελίδα της κόλλας της, αρκεί να αναγράφετε στη κορυφή της σελίδας τη λέξη **ΠΡΟΧΕΙΡΟ**. Να απαντηθούν όλα θέματα, τα οποία είναι ισοδύναμα. ***Καλή επιτυχία!***

ΘΕΜΑ 1 [10 μονάδες].
Σωματίδιο μάζας m κινείται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$x = x_o + at^2, \quad y = bt^3, \quad z = ct.$$

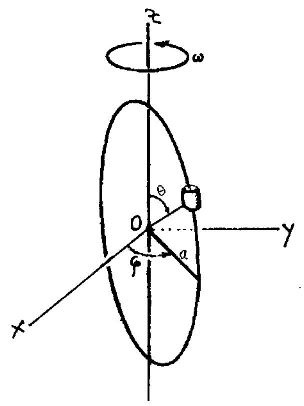
Βρείτε τη γωνιακή στροφορμή $\vec{l}$ για κάθε χρονική στιγμή t. Βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$ και από αυτήν την ροπή $\vec{\tau}$ που δρα πάνω στο σωματίδιο. Επαληθεύσατε ότι το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής (δηλ. $d\vec{l}/dt = \vec{\tau}$) ικανοποιείται.

ΘΕΜΑ 2 [10 μονάδες]
Σώμα μάζας m κινούμενο στον 3-διάστατο χώρο υφίσταται δύναμη που περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια,

$$V = V_o e^{5x^2+4y^2+3z^2},$$

όπου V_o μια θετική σταθερά και οι συντεταγμένες (x,y,z) είναι αδιάστατοι αριθμοί. Δείξετε ότι η V έχει ένα ακρότατο σημείο ελαχίστης τιμής και βρείτε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης γύρω από το σημείο αυτό.

ΘΕΜΑ 3 [10 μονάδες]
Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται μια χάνδρα (κομπολογιού) μάζας m που ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε ένα περιστρεφόμενο κυκλικό πλαίσιο, ακτίνος a. Το κυκλικό πλαίσιο βρίσκεται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο και περιστρέφεται γύρω από μια κατακόρυφη διάμετρο με γωνιακή ταχύτητα ω. Βρείτε την συνάρτηση Hamilton χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τις θ και φ, και γράψετε τις κανονικές εξισώσεις Hamilton.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ 1:

Από τις δεδομένες παραμετρικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου,

$$x = x_o + at^2, \quad y = bt^3, \quad z = ct$$

υπολογίζομαι το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, και την επιτάχυνση $\vec{a}$ του σωματιδίου,

$$\vec{r} = (x_o + at^2)\tilde{\mathbf{i}} + bt^3\tilde{\mathbf{j}} + ct\,\tilde{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2at\,\tilde{\mathbf{i}} + 3bt^2\tilde{\mathbf{j}} + c\,\tilde{\mathbf{k}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 2a\,\tilde{\mathbf{i}} + 6bt\,\tilde{\mathbf{j}} + 0,$$

όπου $\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x,y,z, αντίστοιχα.

Η στροφορμή του σωματιδίου $\vec{l}$ είναι,

$$\begin{aligned}\vec{l} &= \vec{r} \times m\vec{\upsilon} \\ &= [(x_o + at^2)\tilde{\mathbf{i}} + bt^3\tilde{\mathbf{j}} + ct\,\tilde{\mathbf{k}}] \times m[2at\,\tilde{\mathbf{i}} + 3bt^2\tilde{\mathbf{j}} + c\,\tilde{\mathbf{k}}] \\ &= m[cbt^3 - 3bct^3]\tilde{\mathbf{i}} + m[2act^2 - c(x_o + at^2)]\tilde{\mathbf{j}} + m[3bt^2(x_o + at^2) - 2abt^4]\tilde{\mathbf{k}} \\ &= -2mcbt^3\tilde{\mathbf{i}} + m(-cx_o + act^2)\tilde{\mathbf{j}} + m(3bx_o t^2 + abt^4)\tilde{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Η δύναμη $\vec{F}$ ισούται,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(2a\,\tilde{\mathbf{i}} + 6bt\,\tilde{\mathbf{j}}),$$

οπότε η ροπή $\vec{\tau}$ θα είναι ,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \tilde{\mathbf{i}} & \tilde{\mathbf{j}} & \tilde{\mathbf{k}} \\ x_o + at^2 & bt^3 & ct \\ 2ma & 6mbt & 0 \end{vmatrix} = -m(6bct^2)\tilde{\mathbf{i}} + m(2act)\tilde{\mathbf{j}} + m(6bx_o t + 4abt^3)\tilde{\mathbf{k}}.$$

Υπολογίζουμε τη παράγωγο

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = -6mcbt^2\tilde{\mathbf{i}} + 2mcat\tilde{\mathbf{j}} + (6mbx_o t + 4mabt^3)\tilde{\mathbf{k}}$$

άρα ικανοποιείται το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής ($\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$).

ΘΕΜΑ 2:

Από τη δυναμική ενέργεια υπολογίζουμε τη δύναμη

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -(\frac{\partial V}{\partial x}\tilde{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\tilde{\mathbf{k}}) = -10xV\,\tilde{\mathbf{i}} - 8yV\,\tilde{\mathbf{j}} - 6zV\,\tilde{\mathbf{k}} \qquad (1)$$

όπου $\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x,y,z, αντίστοιχα. Η δύναμη μηδενίζεται ($\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 0$) στο σημείο όπου μηδενίζονται και οι τρεις συνιστώσες της, δηλ.

$$\begin{aligned} 10x &= 0, \\ 8y &= 0, \\ 6z &= 0, \end{aligned}$$

με προφανή λύση,

$$(x = y = z = 0).$$

Επομένως, το σημείο (0,0,0) αποτελεί σημείο ισορροπίας ή ακρότατο της V(x,y,z). Παρατηρούμε ότι η Hessian της δυναμικής ενέργειας στο ακρότατο σημείο (0,0,0) είναι θετική,

$$H\,V(0,0,0)(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(0,0,0)} \eta_i \eta_j > 0\,. \qquad (2)$$

όπου για προφανείς λόγους χρησιμοποιούμαι εναλλακτικά τους συμβολισμούς $(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \equiv (x,y,z) \equiv (x_1,x_2,x_3)$. Μπορούμε λοιπόν να αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο (0,0,0) ως ακολούθως,

$$V(x,y,z) = V(0,0,0) + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(0,0,0)} \eta_i \eta_j \qquad (3)$$

όπου $V(0,0,0)=V_o$ και

$$\begin{aligned} V_{xx} &= (10+100x^2)V && \rightarrow\; V_{11} \equiv V_{xx}(0,0,0) = 10V_o, \\ V_{yy} &= (8+64y^2)V && \rightarrow\; V_{22} \equiv V_{yy}(0,0,0) = 8V_o, \\ V_{zz} &= (6+36z^2)V && \rightarrow\; V_{33} \equiv V_{zz}(0,0,0) = 6V_o, \\ V_{xy} &= 80xyV && \rightarrow\; V_{12} \equiv V_{xy}(0,0,0) = 0, \qquad (4) \\ V_{xz} &= 60xzV && \rightarrow\; V_{13} \equiv V_{xz}(0,0,0) = 0, \\ V_{yz} &= 48yzV && \rightarrow\; V_{23} \equiv V_{yz}(0,0,0) = 0. \end{aligned}$$

Με αυτά τα στοιχεία μήτρας, η (3) γράφεται (θέτουμε V_o=1, το οποίο καταλαβαίνουμε ότι θα έχει συνέπεια στις μονάδες)

$$V(x,y,z) = 1 + 5x^2 + 4y^2 + 3z^2. \quad (5)$$

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (6)$$

(θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η μάζα m δεν μπορεί να μετρείται σε Kgr, εφόσον οι συντεταγμένες x,y,z είναι αδιάστατοι αριθμοί). Από την (3) υπολογίζουμε τα στοιχεία μήτρας,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = m, \text{ και } T_{12} = T_{23} = T_{13} = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοτιμές της συχνότητος γράφεται,

$$\left|\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right| = \begin{vmatrix} 10-\omega^2 m & 0 & 0 \\ 0 & 8-\omega^2 m & 0 \\ 0 & 0 & 6-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0,$$

απ’ όπου προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{10}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{8}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{6}{m}}.$$

(δεν πρέπει να μας μπερδέψουν οι μονάδες των μεγεθών).

ΘΕΜΑ 3:

Η δυναμική ενέργεια της χάνδρας (με στάθμη αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο z=0 που περνά από το κέντρο του κυκλικού πλαισίου) είναι,

$$V = mga\cos\theta,$$

ενώ η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2}m(r\,\dot\varphi)^2 + \tfrac{1}{2}m(a\dot\theta)^2,$$

όπου $r = a\sin\theta$. Ο πρώτος όρος της κινητικής ενέργειας προέρχεται από την περιστροφή του πλαισίου γύρω από την κατακόρυφη διάμετρο και ο $2^{ος}$ από την ολίσθηση της χάνδρας πάνω στο πλαίσιο. Συνεπώς η Lagrangian είναι:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot\varphi\, a\sin\theta)^2 + \tfrac{1}{2}m(a\dot\theta)^2 - mga\cos\theta \qquad (1)$$

απ’ όπου υπολογίζουμε τις συζυγείς ορμές,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ma^2\dot\theta, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m(a\sin\theta)^2\,\dot\varphi,$$

και έπονται οι γενικευμένες ταχύτητες $\dot{\theta} = p_\theta / ma^2$, $\dot{\varphi} = p_\varphi / m(a\sin\theta)^2$. Επομένως η χαμιλτονιανή γράφεται, απαλείφοντας τις ταχύτητες $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$,

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m(a\sin\theta)^2} + mga\cos\theta\,. \qquad (2)$$

Οι εξισώσεις Hamilton έπονται από την (2),

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2}, \qquad (3\alpha)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m(a\sin\theta)^2}, \qquad (3\beta)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{ma^2 \sin^3\theta} - mga\sin\theta\,, \qquad (3\gamma)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0\,. \qquad (3\delta)$$

Εφόσον η συντεταγμένη φ είναι κυκλική, από την (3δ) προκύπτει ότι η p_φ είναι σταθερή (που οφείλεται στην απουσία οριζόντιων δυνάμεων). Κατ' επέκταση και η γωνιακή ταχύτητα $\omega \equiv \dot{\varphi}$ είναι σταθερή. Εισάγοντας ακόμη τις ταχύτητες από τις (3α) και (3β) στη (3γ), παίρνουμε,

$$\ddot{\theta} = -\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin 2\theta - \frac{g}{a}\sin\theta \qquad (4)$$

η οποία είναι η γνωστή μας εξίσωση του μαθηματικού εκκρεμούς συν ένα φυγοκεντρικό όρο, που οφείλεται στη περιστροφική κίνηση του πλαισίου. Η επίλυση των εξισώσεων κίνησης Hamilton δεν ζητείται.

Department of Applied Mathematics

ΜΑΘΗΜΑ: ***ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ***

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ: ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005

Διδάσκων: Καθηγητής Μ. Βελγάκης

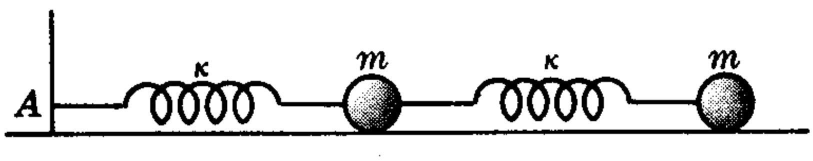
Ηράκλειο, 17-9-2005

ΟΔΗΓΙΕΣ: Μπορείτε να χρησιμοποιείτε σαν πρόχειρο οποιαδήποτε σελίδα της κόλλας, αρκεί να αναγράφετε στη κορυφή της σελίδας τη λέξη **ΠΡΟΧΕΙΡΟ**. Να απαντηθούν όλα τα θέματα, τα οποία είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία!

ΘΕΜΑ 1 [10 μονάδες].

Δύο ίσες μάζες m κινούνται χωρίς τριβή κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας γραμμής, συνδεδεμένες με ίδια ελατήρια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο του ενός ελατηρίου προσδένεται στο σταθερό σημείο Α. (α) Γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. (β) Βρείτε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης, και (γ) περιγράψετε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.



ΘΕΜΑ 2 [10 μονάδες]

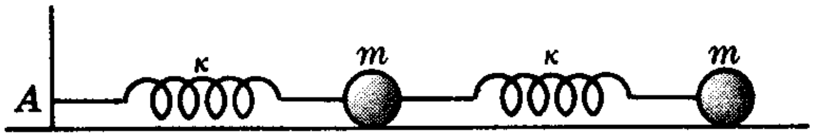
Σωματίδιο μάζας m κινείται χωρίς τριβή στην εσωτερική επιφάνεια ενός κατακόρυφου κώνου που περιγράφεται από την εξίσωση $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$. (α) Γράψετε την συνάρτηση Hamilton, και (β) τις εξισώσεις Hamilton, σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1.

Το άκρο του ενός ελατηρίου προσδένεται στο σταθερό σημείο Α. (α) Γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος. (β) Βρείτε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης, και (γ) περιγράψετε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Λαμβάνομε την οριζόντια ευθεία γραμμή, κατά μήκος της οποίες κινούνται οι μάζες, σαν x-άξονας. Έστω x_1, x_2 οι θέσεις των μαζών σε τυχόντα χρόνο t.



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1 - l_o)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa(x_1 - l_o)^2 \quad (1)$$

(όπου l_0 είναι το μήκος του ατέντωτου ελατηρίου, το οποίο για ευκολία μας παίρνομε ίσο με μηδέν l_0=0), ενώ η κινητική του ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 . \qquad (2)$$

Από τις ενέργειες (1) και (2) υπολογίζομε τους αντίστοιχους πίνακες,

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & \kappa \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση έπεται από την ορίζουσα,

$$\left|\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right| = \begin{vmatrix} 2\kappa - \omega^2 m & -\kappa \\ -\kappa & \kappa - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 , \quad (4)$$

η οποία οδηγεί στην εξίσωση ιδιοτιμών,

$$(2\kappa - \omega^2 m)(\kappa - \omega^2 m) - \kappa^2 = 0 . \qquad (5)$$

Οι λύσεις της (5) είναι,

$$\omega_1^2 = \tfrac{(3-\sqrt{5})}{2}\omega_o^2, \quad \omega_2^2 = \tfrac{(3+\sqrt{5})}{2}\omega_o^2 ,$$

όπου $\omega_o^2 = \frac{\kappa}{m}$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα πλάτη ταλάντωσης των ατόμων για καθεμιά συχνότητα. Πράγματι, η εξίσωση (12-11) γράφεται,

$$
\begin{aligned}
&+(2\kappa - \omega_k^2 m)\, a_{1k} - \kappa\, a_{2k} = 0 \\
&-\kappa\, a_{1k} + (\kappa - \omega_k^2 m) a_{2k} = 0,
\end{aligned}
$$

όπου ο δείκτης k στις συνιστώσες του πλάτους (a_{1k}, a_{2k}) αναφέρεται στη συχνότητα ω_k, ή

$$
\begin{aligned}
&+(2\omega_o^2 - \omega_k^2)\, a_{1k} - \omega_o^2 a_{2k} = 0 \\
&-\omega_o^2\, a_{1k} + (\omega_o^2 - \omega_k^2) a_{2k} = 0,
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

(ι) οπότε για $\omega=\omega_1$, έχομε

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\, a_{11} - a_{21} = 0 \\
&-a_{11} + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\, a_{21} = 0,
\end{aligned}
$$

απ' όπου παίρνομε

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (7)$$

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", εξίσωση (12-14),

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jl} = \delta_{kl}.$$

Για k=l=1 παίρνομε,

$$T_{11}\alpha_{11}\alpha_{11} + T_{22}\alpha_{21}\alpha_{21} = 1 \quad \Rightarrow \quad m(a_{11}^2 + a_{21}^2) = 1$$

και σε συνδυασμό με την (7)

$$a_{11} = \sqrt{\frac{2}{m(5+\sqrt{5})}} \xrightarrow[\theta\acute{\varepsilon}\tau o\mu\varepsilon\ m=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{5}})]{} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.6 \quad \text{και} \quad a_{21} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1$$

συνεπώς

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Η κίνηση αυτή παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα.

(ιι) για $\omega=\omega_2$, η εξίσωση (6) γράφεται

$$\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,a_{12} - a_{22} = 0$$
$$-a_{12} - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,a_{22} = 0,$$

απ' όπου παίρνομε

$$\frac{a_{22}}{a_{12}} = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,. \quad (8)$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη συνθήκη "ορθοκανονικότητος", (12-14). Για k=l=2 έχομε,

$$T_{11}\alpha_{12}\alpha_{12} + T_{22}\alpha_{22}\alpha_{22} = 1 \quad \Rightarrow \quad m(a_{12}^2 + a_{22}^2) = 1$$

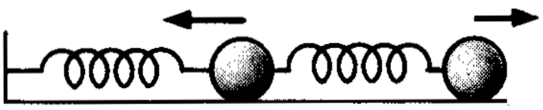
και σε συνδυασμό με την (8) λαμβάνομε (έχομε ήδη υποθέσει ότι $m = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{5}})$),

$$a_{12} = 1 \quad \text{και} \quad a_{22} = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.6\,,$$

άρα

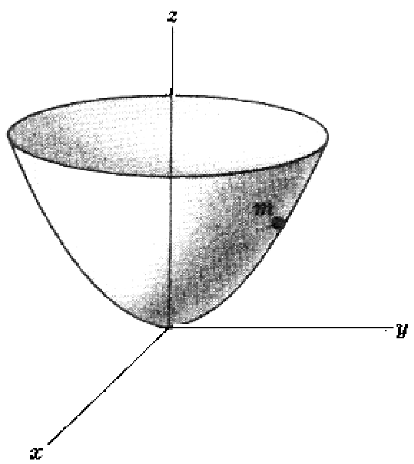
$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Αυτή η μορφή ταλάντωσης παρίσταται στο ακόλουθο σχήμα.



ΘΕΜΑ 2.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η κωνική επιφάνεια: $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$. Ορίζουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες (x,y,z) ως εξής: x=rcosθ, y=rsinθ, z=z. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κώνου παίρνομε: r=ztanα (για z,r>0), ή z=r/tanα=rcotα. Ακόμη, οι παράγωγοι ως προς το χρόνο είναι: $\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$, $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$, $\dot{z} = \dot{r}\cot\alpha$.



Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος που κινείται χωρίς τριβή στην εσωτερική επιφάνεια του κώνου (με στάθμη αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο z=0 που περνά από το κέντρο του κώνου) είναι,

$$V = mgz = mgr\, cota,$$

ενώ η κινητική του ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2).$$

Συνεπώς η Lagrangian είναι,

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cot\alpha \quad (1)$$

απ' όπου υπολογίζουμε τις συζυγείς ορμές,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\csc^2\alpha \quad \text{και} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

απ' όπου έπονται οι γενικευμένες ταχύτητες: $\dot{r} = \frac{p_r}{m}\sin^2\alpha$ και $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$. Οπότε, απαλείφοντας τις ταχύτητες $(\dot{r},\dot{\theta})$, η χαμιλτονιανή έπεται,

$$H = \sum_i p_i\dot{q}_i - L = \frac{p_r^2 \sin^2\alpha}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr\cot\alpha. \quad (2)$$

Οι εξισώσεις Hamilton έπονται από την (2),

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r \sin^2\alpha}{m}, \quad (3α)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad (3β)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta}{mr^3} - mg\cot\alpha, \quad (3γ)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (3δ)$$

Εφόσον η συντεταγμένη θ είναι κυκλική, προκύπτει από την (3δ) ότι η p_θ είναι σταθερή (που οφείλεται στην απουσία αζιμούθιας δύναμης). Η ποσότης αυτή είναι η στροφορμή (ως τον z-άξονα) του σώματος. Πράγματι από την (3β) έχομε $l_z = l \equiv p_\theta = mr^2\dot{\theta}$. Η επίλυση των εξισώσεων Hamilton δεν ζητείται.

ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ηράκλειο, 30-6-2005

Εργασία 1.

Δίδεται σώμα, μάζας m, που κινείται στον 3-διάστατο χώρο και υφίσταται δύναμη που περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια,

$$V = V_o e^{(5x^2+4y^2+3z^2-8yz-6ay-8az)/a^2},$$

όπου V_o και a θετικές σταθερές.

(α) Χαράξετε τη γραφική παράσταση της V(x,y,z) στις 3D με κάποιο πακέτο γραφικών.

(β) Δείξετε ότι η V έχει ένα ακρότατο σημείο ελαχίστης τιμής.

(γ) Βρείτε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης γύρω από αυτό το ελάχιστο.

Φοιτητής: ....

(Symon, 12-3)

ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ηράκλειο, 30-6-2005

Εργασία 2.

Θεωρούμε σώμα, μάζας m, το οποίο κινείται μέσα στο δυναμικό της μορφής,

$$V(x) = \tfrac{1}{2} k\, x^2 + \tfrac{1}{4} b\, x^4 ,$$

όπου x είναι η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας και k, b σταθερές ($k \gtreqless 0$ και $b \gtreqless 0$).

(α) Χαράξετε τη γραφική παράσταση του δυναμικού V(x) για διάφορες (χαρακτηριστικές) τιμές των k και b.

(β) Γράψετε την εξίσωση κίνησης και επιλύσετέ την για διάφορες (χαρακτηριστικές) τιμές των k και b.

(γ) Δώσετε τη γραφική παράσταση κάθε λύσης, όπως και την αντίστοιχη τροχιά στο χώρο των φάσεων.

Φοιτητής: ....

(Πνευμα.1987)

ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ηράκλειο, 30-6-2005

Εργασία 3.

Θεωρούμε μια αλυσίδα N συζευγμένων μαθηματικών εκκρεμών, μέσα στο πεδίο βαρύτητος. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εκκρεμών περιορίζονται στους πρώτους γείτονες (θα μπορούσε να επεκταθεί και στους $2^{ους}$ γείτονες κλπ.), δηλ. κάθε εκκρεμές αλληλεπιδρά με τα δύο εκκρεμή που βρίσκονται εκ δεξιών και εξ ευωνύμων, ας πούμε μέσω ελατηρίων σταθεράς k. Αν m, l είναι τα φυσικά χαρακτηριστικά κάθε εκκρεμούς,

(α) Γράψετε την εξίσωση κίνησης καθενός εκκρεμούς για μικρές απομακρύνσεις των εκκρεμών από τη θέση ισορροπίας τους.

(β) Επιλύσατε το σύστημα των προκυπτουσών διαφορικών εξισώσεων.

(γ) Θέσατε τις παραπάνω εξισώσεις από διακριτή σε συνεχή μορφή (π.χ., με ανάπτυξη σε σειρά Taylor) και επιλύσατε τις προκύπτουσες εξισώσεις (/ση).

(δ) Δώσατε μια γραφική παράσταση των λύσεων που βρίσκετε.

Φοιτητής: ....

(Sine-Gordon)

ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ηράκλειο, 30-6-2005

Εργασία 4.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Yukawa για πυρηνικές δυνάμεις, η δύναμη μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου περιγράφεται από το δυναμικό,

$$V(r) = -\frac{Ke^{-\alpha r}}{r},$$

όπου α, K θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε τη δύναμη μεταξύ των νουκλεονίων και συγκρίνατέ την με τη δύναμη του αντιστρόφου τετραγώνου.

(β) Χαράξετε τη γραφική παράσταση του δυναμικού V(r) και εξερευνήσατε τα είδη κίνησης που μπορούν να λαμβάνουν χώρα αν ένα σώμα μάζας m κινείται υπό την επίδραση μιάς τέτοιας δύναμης.

(γ) Συζητήσατε πώς αναμένονται οι κινήσεις να διαφέρουν από τα αντίστοιχα είδη κίνησης για τις δυνάμεις αντιστρόφου τετραγώνου.

(δ) Υπολογίσατε τη στροφορμή *l* και την ενέργεια E για κυκλική κίνηση ακτίνος α.

(ε) Υπολογίσατε την περίοδο κυκλικής κίνησης και τη περίοδο μικρών ακτινικών ταλαντώσεων.

(στ) Δείξατε ότι για οι σχεδόν κυκλικές τροχιές είναι σχεδόν κλειστές όταν η ακτίνα α είναι πολύ μικρή.

Φοιτητής: ....

(Symon 3-47)

ΜΑΘΗΜΑ: **ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Ηράκλειο, 30-6-2005

Εργασία 5.

Σώμα μάζας m κινείται χωρίς τριβή πάνω στην εσωτερική επιφάνεια του παραβολοειδούς εκ περιστροφής: $x^2+y^2 = \alpha z$, υπό την επίδραση της βαρύτητος.

(α) Χαράξετε τη γραφική παράσταση της παραβολοειδούς επιφάνειας στις 3D.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης Lagrange του σώματος.

(γ) Επιλύσατε τις εξισώσεις κίνησης και δώσετε την γραφική παράσταση των λύσεων συναρτήσει του χρόνου.

(δ) Για μικρές απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας, προσδιορίσετε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης και τους αντίστοιχους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Φοιτητής: ....

(Spiegel 11-20)