ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αρχικά με ένα μεμονωμένο σύστημα δύο σωμάτων στα οποία ασκούνται μόνο οι μεταξύ τους κεντρικές δυνάμεις, επιτρέποντας ωστόσο και την επίδραση ενός (εξωτερικού) βαρυτικού πεδίου. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε σύστημα N σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις δύο σωμάτων, ενώ υφίστανται επίσης και την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων.

5.1 Πρόβλημα δύο σωμάτων

Θεωρούμε ένα σύστημα δύο σωμάτων με μάζες m_1,m_2 που καταλαμβάνουν τις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, και έστω $\vec{F}$ η δύναμη που εξασκεί το δεύτερο σώμα πάνω στο πρώτο (οπότε και το πρώτο θα εξασκεί στο δεύτερο τη δύναμη $-\vec{F}$). Αν το σύστημα των δύο σωμάτων βρίσκεται μέσα στο (ομογενές) πεδίο βαρύτητος $\vec{g}$ (και δεν εξασκούνται άλλες εξωτερικές δυνάμεις), τότε οι εξισώσεις κίνησης τους ($2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα) είναι

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F} + m_1\vec{g}, \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F} + m_2\vec{g}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Πρέπει να επιστήσουμε την προσοχή μας στη διανυσματική μορφή του βάρους. Μπορούμε να εισάγουμε ένα σύστημα νέων μεταβλητών, το διάνυσμα **κέντρου μάζας**

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

και το διάνυσμα της **σχετικής θέσης** των δύο σωμάτων,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \qquad (3)$$

οπότε εκφράζοντας τις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ συναρτήσει των $\vec{R}, \vec{r}$ και αντικαθιστώντας στην (1) παίρνομε τις εξισώσεις κίνησης

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = (m_1 + m_2)\vec{g}, \qquad (4a)$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \qquad (4b)$$

όπου $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$. Η ποσότης αυτή έχει διαστάσεις μάζας και καλείται **ανηγμένη μάζα**. Οι εξισώσεις (4) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η λύση της (4a) είναι,

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{\upsilon}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2, \quad (5)$$

όπου $\vec{R}_o, \vec{\upsilon}_o$ σταθερές ολοκλήρωσης. Απουσία βαρυτικού πεδίου ($\vec{g}$=0), η λύση αυτή δίδει,

$$\vec{P}_o \equiv (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}_o = \text{const.} \qquad (6)$$

δηλ. η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερά και $\vec{\upsilon}_o$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_{cm}$. Ακόμη εισάγοντας τις μεταβλητές $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ από την (2) στην (6) έχομε,

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_1 = \text{const.},$$

οπότε βλέπουμε ότι η (6) εκφράζει τον νόμο διατήρησης της ορμής, απουσία εξωτερικών δυνάμεων. Ακόμη, η εξίσωση (4b) επιλύεται, αν είναι γνωστή η αμοιβαία δύναμη $\vec{F}$. Έχοντας τώρα βρει τις λύσεις των (4), μπορούμε να πάρουμε τις θέσεις των δύο σωμάτων από τις (2)–(3),

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια μερικά μεγέθη του συστήματος των δύο μαζών. Η κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων γράφεται συναρτήσει των $\vec{R}$ και $\vec{r}$,

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{R}} + \frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}})^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{R}} - \frac{\mu}{m_2}\dot{\vec{r}})^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{R}})^2 + \tfrac{1}{2}\mu(\dot{\vec{r}})^2 \qquad (8) \end{aligned}$$

δηλ. η κινητική ενέργεια διαχωρίζεται στην κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας συν έναν όρο που αντιστοιχεί στη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων. Παρομοίως η στροφορμή του συστήματος των δύο σωμάτων γράφεται συναρτήσει των $\vec{R}$ και $\vec{r}$,

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{r}_1 \times m_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\dot{\vec{r}}_2 \\ &= m_1(\vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}) \times (\dot{\vec{R}} + \frac{\mu}{m_1}\dot{\vec{r}}) + m_2(\vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}) \times (\dot{\vec{R}} - \frac{\mu}{m_2}\dot{\vec{r}}) \\ &= (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad (9) \end{aligned}$$

καθόσον οι διασταυρούμενοι όροι που περιλαμβάνουν τα γινόμενα $\vec{R} \times \dot{\vec{r}}$ κλπ. απαλείφονται, επομένως η κινητική ενέργεια όπως και η στροφορμή διαχωρίζονται σε ένα όρο που συνδέεται με τη κίνηση του κέντρου μάζας και σε ένα δεύτερο όρο που συνδέεται με τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων. Ακόμη, υποθέτοντας ότι $V(\vec{r})$ παριστά την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο σωμάτων, η Langrangian του συστήματος είναι,

$$L = \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2 + m_1 g\vec{r}_1 + m_2 g\vec{r}_2 - V(\vec{r}) \qquad (10)$$

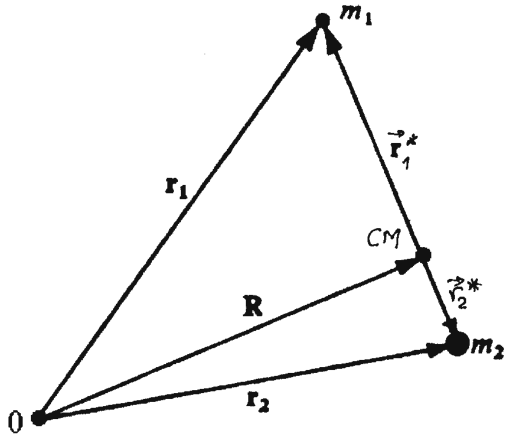
όπου έχομε πάρει την βαρυτική δυναμική του σωματιδίου m_i ίση με $-m_i g\vec{r}_i$. Εισάγοντας τις συντεταγμένες $\vec{R}$ και $\vec{r}$ στην (10), παίρνομε

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{R}})^2 + \tfrac{1}{2}\mu(\dot{\vec{r}})^2 + (m_1 + m_2)g\vec{R} - V(\vec{r}). \qquad (11)$$

Εύκολα παίρνομε από την (11) τις εξισώσεις Lagrange (4).

Συχνά είναι βολικό η κίνηση του συστήματος να περιγράφεται ως προς ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το κέντρο μάζας (CM) ηρεμεί, δηλ. $\dot{\vec{R}} = 0$. Το σύστημα αυτό καλείται **σύστημα κέντρου μάζας** (**σύστημα ΚΜ**). Βέβαια το σύστημα αυτό **δεν** είναι αδρανειακό, εφόσον είναι επιταχυνόμενο με επιτάχυνση ίση με αυτήν του κέντρου μάζας, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (σύστημα αναφοράς 0 του Σχήματος 1).

Σχήμα 1



Θα συμβολίζομε με αστερίσκο τα μεγέθη που αναφέρονται ως προς το σύστημα **ΚΜ**. Θα επιλέξουμε ακόμη ως αρχή των αξόνων 0 στο σύστημα **ΚΜ** το κέντρο μάζας, οπότε $\vec{R}^* = 0$, οπότε οι (7) γράφονται,

$$\vec{r}_1^{\,*} = \frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \quad \text{και} \quad \vec{r}_2^{\,*} = -\frac{\mu}{m_2}\vec{r}. \qquad (12)$$

Αξίζει να δούμε πώς συνδέονται τα διάφορα μεγέθη που μετρώνται στα δύο συστήματα συντεταγμένων, δηλ. στο αδρανειακό σύστημα 0 και στο (μη-αδρανειακό) σύστημα **ΚΜ**. Για παράδειγμα, οι ορμές των δύο σωμάτων ως προς το σύστημα **ΚΜ** είναι ίσες και αντίθετες, διότι

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^{\,*} &= m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,*} = \mu\dot{\vec{r}}, \\ \vec{p}_2^{\,*} &= m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,*} = -\mu\dot{\vec{r}}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Όμως, από το Σχήμα 1 βλέπουμε ότι οι θέσεις των σωμάτων προς το αδρανειακό σύστημα 0 είναι

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1^{\,*}, \quad \text{και} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_2^{\,*}, \qquad (14)$$

οπότε οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1^{\,*}, \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2^{\,*}. \end{aligned} \tag{15}$$

Συνεπώς, οι ορμές των δύο σωμάτων ως προς το αδρανειακό σύστημα 0 είναι,

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= m_1\dot{\vec{r}}_1 = m_1\dot{\vec{R}} + m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,*}, \\ \vec{p}_2 &= m_2\dot{\vec{r}}_2 = m_2\dot{\vec{R}} + m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,*} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις (13) θέτοντας $\vec{p}^{\,*} = \mu\dot{\vec{r}}$, οι ορμές αυτές γράφονται

$$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{R}} + \vec{p}^{\,*}, \qquad \vec{p}_2 = m_2\dot{\vec{R}} - \vec{p}^{\,*}. \tag{16}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε την ολική ορμή του συστήματος,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}.$$

Ως προς το σύστημα **ΚΜ**, η κινητική ενέργεια και η στροφορμή, είναι

$$\begin{aligned} T^* &= \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1^{\,*})^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2^{\,*})^2 \xrightarrow[(12)]{} \tfrac{1}{2}\mu\,(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{(\vec{p}^{\,*})^2}{2\mu}, \\ \vec{l}^{\,*} &= \vec{r}_1^{\,*} \times m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,*} + \vec{r}_2^{\,*} \times m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,*} \xrightarrow[(12)]{} \mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}^{\,*}. \end{aligned} \tag{17}$$

όπου ενδιάμεσα έγινε χρήση των σχέσεων (12). Ως προς το αδρανειακό σύστημα 0, τα μεγέθη κινητική ενέργεια και η στροφορμή είναι,

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{r}}_2)^2 \xrightarrow[(14)]{} \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{\vec{R}})^2 + T^*, \\ \vec{l} &= \vec{r}_1 \times m_1\dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\dot{\vec{r}}_2 \xrightarrow[(14)]{} (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{l}^{\,*} \end{aligned} \tag{18}$$

όπου ενδιάμεσα έγινε χρήση των σχέσεων (14) και τα μεγέθη T^* και $\vec{l}^{\,*}$ έχουν οριστεί στην (17). Από την (18) έπεται λοιπόν ότι π.χ. η τιμή του μεγέθους “κινητική ενέργεια” που μετρά ένας παρατηρητής στο αδρανειακός σύστημα 0, ισούται με την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας (όπου είναι συγκεντρωμένη η ολική μάζα του συστήματος), συν την κινητική ενέργεια που μετρά ένας παρατηρητής πάνω στο σύστημα **ΚΜ**.

Παράδειγμα: *Κίνηση δορυφόρου γύρω από πλανήτη.* Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ δορυφόρου και πλανήτη δίδεται από τον νόμο βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα,

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,\tilde{r}$$

όπου $\tilde{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα (από τον πλανήτη προς τον δορυφόρο), οπότε η εξίσωση (4b) γράφεται,

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\tilde{r}$$

ή

$$\mu\ddot{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $\dot{r}$ και ολοκληρώνοντας παίρνομε,

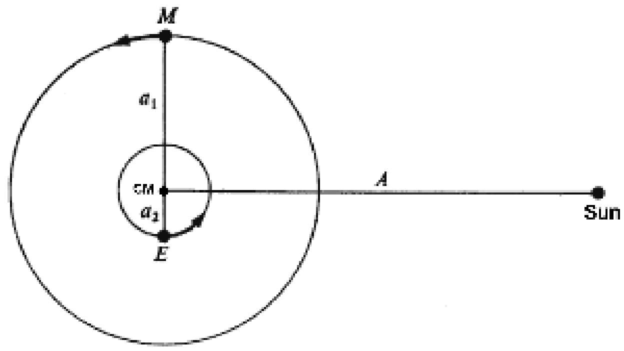
$$\tfrac{1}{2}\mu\,(\dot{r})^2 - \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r} = E\,,$$

όπου E είναι η σταθερά ολοκλήρωσης (η οποία σταθερά βέβαια παριστάνει την ολική ενέργεια του συστήματος). Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4, εξισώσεις (4.26)–(4.28), για $k = -G(m_1+m_2)\mu < 0$ και για $E<0$ (οπότε η εκκεντρότης $\varepsilon<1$), η τροχιά είναι ελλειπτική με περίοδο περιφοράς, εξ. (4.33),

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}\,,$$

όπου a είναι ο μεγάλος ημιάξονας της σχετικής τροχιάς (ως προς το αδρανειακό σύστημα 0, θεωρώντας το βαρύτερο σώμα ακίνητο).

Σχήμα 2



Στο σύστημα **ΚΜ**, τα δύο σώματα (δορυφόρος-πλανήτης) διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές (βλέπε Σχήμα 2) με μεγάλους ημιάξονες αντίστοιχα, εξ.(12),

$$a_1 = \frac{\mu}{m_1}a \quad \text{και} \quad a_2 = \frac{\mu}{m_2}a,$$

(όπου έχουμε παραλήψει τον αστερίσκο). Για το σύστημα Γης-Σελήνης $m_1/m_2=\frac{1}{81.5}$ και ο μεγάλος ημιάξονας είναι $a=3.8\times10^5$Km, οπότε στο σύστημα **ΚΜ** η Γη κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από το κέντρο μάζας με μεγάλο ημιάξονα $a_2 = \frac{1}{82.5}a = 4700\ \mathrm{Km}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

5.2 Συστήματα πολλών σωμάτων

Θεωρούμε ένα σύστημα N σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις δύο σωμάτων, ενώ υφίστανται επίσης και την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, δηλ. οι δυνάμεις που δρουν στο i-στο σώμα είναι το άθροισμα $\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$, με $i \neq j$, όπου $\vec{F}_i$ είναι η εξωτερική δύναμη. Όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, ορίζουμε το διάνυσμα **κέντρου μάζας**

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i, \qquad (19)$$

όπου $M=m_1+m_2+\ldots+m_N$ είναι η ολική μάζα του συστήματος, οπότε η ολική ορμή του συστήματος είναι,

$$\vec{P}_o = \sum_{i=1} m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}\,. \qquad (20)$$

Η εξίσωση κίνησης του i-στού σώματος δίδεται από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα,

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \qquad (21)$$

και επειδή $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$, αθροίζοντας την (21) ως προς i, λαμβάνουμε τον ρυθμό μεταβολής της ολικής ορμής,

$$\frac{d\vec{P}_o}{dt} = \underbrace{\sum_{ij} \vec{F}_{ij}}_{=0} + \sum_i \vec{F}_i\,, \qquad (22)$$

διότι οι εσωτερικές δυνάμεις ικανοποιούν τον 3^o νόμο του Νεύτωνα, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, επομένως το διπλό άθροισμα μηδενίζεται. Αν η συνολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν, δηλ. $\vec{F}^{ex} \equiv \sum_i \vec{F}_i = 0$ (οπότε λέμε ότι το σύστημα είναι μεμονωμένο), τότε η ολική ορμή διατηρείται σταθερή, ή από την (20) η ταχύτης του κέντρου μάζας είναι σταθερή, $\vec{\upsilon}_{cm} \equiv \dot{\vec{R}} = \text{const.}$

Μπορούμε όπως και στο πρώτο εδάφιο να μελετήσουμε τη στροφορμή και τη κινητική ενέργεια του συστήματος. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$T = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \vec{\upsilon}_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2\,. \qquad (23)$$

Ορίζουμε τις θέσεις των σωμάτων ως προς το αδρανειακό σύστημα 0 και ως το σύστημα **ΚΜ** όπως και στην εξίσωση (14),

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i^{\,*}, \qquad (24)$$

οπότε η κινητική ενέργεια γράφεται,

$$T = \tfrac{1}{2} M(\dot{\vec{R}})^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i\, (\dot{\vec{r}}^{\,*})^2\,, \qquad (25)$$

όπου ο δεύτερος όρος στην (25) παριστάνει την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας, $T^* = \sum_i \frac{1}{2} m_i \, (\dot{\vec{r}}^*)^2$. Παρατηρούμε λοιπόν στην (25) ότι η κινητική ενέργεια διαχωρίζεται στην κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας συν την κινητική ενέργεια του συστήματος ως προς το σύστημα **ΚΜ**.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας παραγωγίζοντας την (23)

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i) . \quad (26)$$

όπου έχομε λάβει υπόψιν μας την εξίσωση κίνησης (21). Το πρώτο γινόμενο στο δεύτερο μέλος περιλαμβάνει όρους της μορφής,

$$\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_{ji} = (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{F}_{ij} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{ij} \qquad (27)$$

όπου $\vec{r} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Ακόμη λάβαμε υπόψιν μας στην (27) τον 3^o νόμο του Νεύτωνα: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Ο όρος $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{ij}$ παριστάνει το ρυθμό παραγωγής έργου από την εσωτερική δύναμη $\vec{F}_{ij}$. Το τελευταίο γινόμενο στο δεύτερο μέλος της (26), $\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i$, παριστάνει το ρυθμό παραγωγής έργου από τις εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_i$.

Η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων είναι,

$$\vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i . \qquad (28)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{\upsilon}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i}_{=0} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i .$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδέν εφόσον τα διανύσματα είναι συγγραμμικά, ενώ ο δεύτερος όρος γράφεται, λαμβάνοντας υπόψιν την (21),

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times (\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i) \qquad (29)$$

Αναπτύσσοντας το διανυσματικό γινόμενο στο δεύτερο μέλος προκύπτουν όροι της μορφής,

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{=0} \qquad (30)$$

διότι $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Αν τώρα η δύναμη αλληλεπίδρασης $\vec{F}_{ij}$ είναι κεντρική, τότε θα έχει την μορφή: $\vec{F}_{ij} = \tilde{r} f(r)$, όπου το μοναδιαίο διάνυσμα ισούται: $\tilde{r} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)/|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ και $r = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Συνεπώς τα διανύσματα $(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \tilde{r}$ στην (30) είναι συγγραμμικά και το εξωτερικό γινόμενό τους ισούται με μηδέν. Συνεπώς, στο δεύτερο μέρος της (29) απομένει μόνο ο όρος $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, ο οποίος ισούται με την ροπή $\vec{\tau}_i$ της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_i$. Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}_i \equiv \vec{\tau}_{ολ} \qquad (31)$$

όπου $\vec{\tau}_{ολ}$ είναι ο ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων. Για μεμονωμένο σύστημα έχομε $\vec{\tau}_{ολ} = 0$, συνεπώς από την (31) προκύπτει ότι η στροφορμή του συστήματος είναι σταθερή, δηλ. $\vec{l} = \text{const.}$

Μπορούμε να διαχωρίσουμε τις συμβολές της στροφορμής που προέρχονται από την κίνηση του κέντρου μάζας και από τη σχετική κίνηση ως προς το κέντρο μάζας. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (23) της θέσης του σώματος ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, η στροφορμή (28) γράφεται,

$$\vec{l} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i^{\,*}) \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^{\,*}) = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*}, \qquad (32)$$

καθόσον οι διασταυρούμενοι όροι που περιλαμβάνουν τους παράγοντες $\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*} = 0$ ή $\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*} = 0$ μηδενίζονται. Συνεπώς, η στροφορμή διαχωρίζεται σε ένα όρο που συνδέεται με τη κίνηση του κέντρου μάζας και σε ένα όρο, $\vec{l}^{\,*} = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,*}$, που συνδέεται με τη σχετική κίνηση των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας. Ο ρυθμός μεταβολής της $\vec{l}^{\,*}$ υπολογίζεται εύκολα.

Συμπερασματικά, το κέντρο μάζας ενός συστήματος κινείται σαν ένα σώμα μάζας Μ πάνω στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη $\vec{F}^{ex}$. Η συμβολή της κίνησης αυτή στη στροφορμή ή τη κινητική ενέργεια μπορεί να διαχωριστεί πλήρως από την συμβολή της σχετικής κίνησης των σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ΣΕΙΡΑ 6

1. Δύο σώματα με μάζας m_1 και m_2 προσαρμόζονται στα άκρα ενός ελατηρίου, σταθεράς k και φυσικού μήκους l_o. Αρχικά το σύστημα ηρεμεί κατακόρυφα με το σώμα m_1 πάνω από το σώμα m_2 σε ύψος l_o. Στη χρονική στιγμή t=0 η μάζα m_1 βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o. Βρείτε τις θέσεις των σωμάτων στη χρονική στιγμή t.