ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Οι σημαντικότερες αντιπρόσωποι της κατηγορίας αυτής των δυνάμεων είναι οι δυνάμεις βαρύτητος και οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις, που είναι ανάλογες του αντιστρόφου τετραγώνου της αποστάσεως. Εξετάζουμε πρώτα τον αρμονικό ταλαντωτή στις 3D.

4.1 Αρμονικός ταλαντωτής στις 3D

Έστω υλικό σωματίδιο το οποίο υπόκειται στην επίδραση κεντρικής δύναμης, η οποία είναι ανάλογη της απόστασής του από κάποιο κέντρο έλξης που ορίζεται σαν αρχή των συντεταγμένων 0,

$$\vec{F} = -k\vec{r} \qquad (1)$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι το **διάνυσμα θέσης** του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Το μείον πρόσημο σημαίνει ότι πρόκειται για **δύναμη επαναφοράς**, όπως λέγονται οι δυνάμεις που πάντοτε κατευθύνονται προς το σημείο ισορροπίας του σώματος. Η εξίσωση κίνησης του σώματος (δηλ. ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, εφόσον δίδεται η δύναμη), είναι

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\,\vec{r}$$

ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} + k\,x &= 0, \\ m\,\ddot{y} + k\,y &= 0, \qquad (2) \\ m\,\ddot{z} + k\,z &= 0. \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ταυτόσημοι με την εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή στη 1D που είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Έχουν την ίδια μορφή και για τους τρεις άξονες και γι αυτό λέμε ότι περιγράφουν ένα **ισότροπο** αρμονικό ταλαντωτή. Οι λύσεις των εξισώσεων (2) είναι,

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t+\varphi_1) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t), \\ y &= y_0 \cos(\omega t+\varphi_2) = A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t), \\ z &= z_0 \cos(\omega t+\varphi_3) = A_z \cos(\omega t) + B_z \sin(\omega t), \end{aligned}$$

ή

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \vec{\varphi}) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t. \qquad (3)$$

όπου $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Τα διανύσματα $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ και $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Πράγματι, αν για t=0 δίδεται ότι $\vec{r} = \vec{r}_0$ και $\dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon}_0$, τότε εφαρμόζοντας τις συνθήκες αυτές στην (3), βρίσκουμε $\vec{A} = \vec{r}_0$ και $\vec{B} = \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{\omega}$.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια μερικές ποσότητες οι οποίες διατηρούνται σταθερές με το χρόνο για τη περίπτωση του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή. Κατά πρώτον, την (ολική) ενέργεια,

$$
\begin{aligned}
E &= T + V = \tfrac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \tfrac{1}{2} k r^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m(-\omega\vec{r}_0 \sin\omega t + \vec{\upsilon}_0 \cos\omega t)^2 + \tfrac{1}{2} k(\vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \sin\omega t)^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m\omega^2 (-\vec{r}_0 \sin\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \cos\omega t)^2 + \tfrac{1}{2} k(\vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \sin\omega t)^2
\end{aligned}
$$

όμως $m\omega^2=k$, άρα

$$
\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{2} k(-\vec{r}_0 \sin\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \cos\omega t)^2 + \tfrac{1}{2} k(\vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \sin\omega t)^2 \\
&= \tfrac{1}{2} k[\vec{r}_0^{\,2} \sin^2\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0^{\,2}}{\omega^2} \cos^2\omega t - 2\frac{\vec{r}_0\vec{\upsilon}_0}{\omega} \sin\omega t \cos\omega t] \\
&+ \tfrac{1}{2} k[\vec{r}_0^{\,2} \cos^2\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0^{\,2}}{\omega^2} \sin^2\omega t + 2\frac{\vec{r}_0\vec{\upsilon}_0}{\omega} \cos\omega t \sin\omega t] \\
&= \tfrac{1}{2} k[\vec{r}_0^{\,2} + \frac{\vec{\upsilon}_0^{\,2}}{\omega^2}] = \tfrac{1}{2} k\vec{r}_0^{\,2} + \tfrac{1}{2} m\vec{\upsilon}_0^{\,2} = E_0
\end{aligned}
$$

δηλ. η (ολική) ενέργεια διατηρείται σταθερά (με το χρόνο). Όσον αφορά την στροφορμή, έχομε

$$
\begin{aligned}
\vec{l} &= \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \\
&= (\vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \sin\omega t) \times m(-\omega\vec{r}_0 \sin\omega t + \vec{\upsilon}_0 \cos\omega t) \\
&= \vec{r}_0 \times m\vec{\upsilon}_0 \cos^2\omega t - \frac{\vec{\upsilon}_0}{\omega} \times m\omega\vec{r}_0 \sin^2\omega t \\
&= \vec{r}_0 \times m\vec{\upsilon}_0 \cos^2\omega t - m\vec{\upsilon}_0 \times \vec{r}_0 \sin^2\omega t = \vec{r}_0 \times m\vec{\upsilon}_0 (\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) \\
&= \vec{r}_0 \times m\vec{\upsilon}_0 = \vec{l}_0
\end{aligned}
$$

δηλ. η στροφορμή διατηρείται σταθερά (με το χρόνο).

4.2 Ολοκληρώματα κίνησης

Έχομε βρει ότι στη περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων γενικά η (ολική) ενέργεια όπως και η στρομορφή διατηρούνται σταθερές. Σε πολικές συντεταγμένες η ενέργεια είναι

$$
\begin{aligned}
E &= T + V = \tfrac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) \\
&= \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

όπου η δυναμική ενέργεια V(r) είναι κάποια συνάρτηση του r. Ακόμη η στροφορμή είναι,

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{σταθερή}. \qquad (5)$$

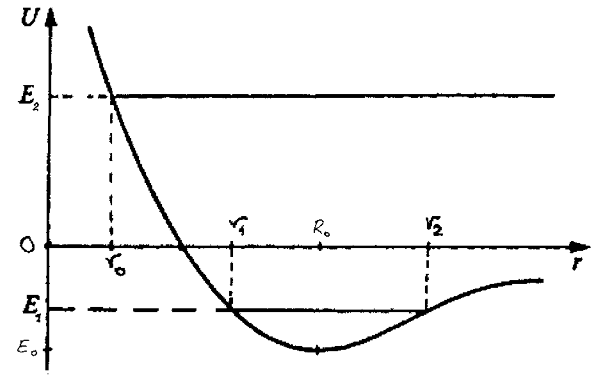
Απαλείφοντας τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ μεταξύ των (4) και (5), παίρνομε,

$$E = (\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}) + V(r)\,. \qquad (6)$$

Οι εξισώσεις (5) και (6) είναι $1^{ης}$ τάξεως και καλούνται **πρώτα ολοκληρώματα κίνησης**. Έχουν προκύψει από πρώτη ολοκλήρωση των αντίστοιχων εξισώσεων Lagrange. Η ποσότης

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \qquad (7)$$

ενέχει θέση δυναμικής ενέργειας και καλείται **ενεργός δυναμική ενέργεια**, ενώ ο όρος $\dfrac{l^2}{2mr^2}$ καλείται **φυγοκεντρικός** όρος.

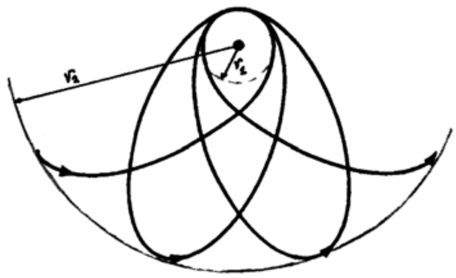


Σχήμα 1 Η ενεργός δυναμική ενέργεια U(r)

Συγκρίνοντας την ενεργό δυναμική ενέργεια με την ολική ενέργεια, μπορούμε να έχομε μια εποπτική εικόνα της κίνησης του σώματος. Πράγματι, εφόσον $E - U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$, θα πρέπει η κίνηση του σώματος να περιορίζεται σ' εκείνες τις περιοχές στις οποίες ισχύει U(r)≤E, δηλ.

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \le E\,.$$

Για παράδειγμα στο Σχήμα 1, όπου απεικονίζεται η Ur) συναρτήσει του r, αν η ενέργεια ισούται με $E=E_1$, τότε η κίνηση του σώματος περιορίζεται μεταξύ των σημείων r_1 και r_2, όπου U(r)≤E, όπως καταγράφεται στο Σχήμα 2. Αν όμως η ενέργεια ισούται με $E=E_2$, τότε η κίνηση του σώματος περιορίζεται στη περιοχή $r_0 \le r$.



Σχήμα 2 Η τροχιά κίνησης για ενέργεια $E=E_1$, όπως καταγράφεται από περιστρεφόμενο παρατηρητή

Η απομένουσα ολοκλήρωση των (5) και (6) μπορεί να γίνει ως εξής: Λύνοντας κατ' αρχήν την (6) ως προς $\dot{r}$, προκύπτει

$$\dot{r} = \sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)} \qquad (8)$$

ή

$$\frac{dr}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = dt \qquad (9)$$

και

$$\int_{r_o}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\tfrac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = \int_0^t dt = t \qquad (10)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι για t=0 το σώμα ξεκινά από το σημείο r_o. Η ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο πρώτο μέρος είναι συνάρτηση του r, άρα μπορεί να ολοκληρωθεί και να βρούμε τη λύση,

$$r = r(t). \qquad (11)$$

Έχοντας βρει τη λύση r(t), η λύση θ(t) μπορεί να εξαχθεί αμέσως. Πράγματι, λύνοντας κατ' αρχήν την (5) ως προς $\dot{\theta}$, έχομε,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

ή

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_0^t \frac{l}{mr^2} dt$$

και αντικαθιστώντας τη λύση r(t) που βρήκαμε, το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέρος υπολογίζεται,

$$\theta - \theta_0 = \frac{l}{m}\int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} \qquad (12)$$

συνεπώς έχομε βρει τη λύση θ=θ(t) και r=r(t) που δίδονται από τις εξισώσεις (11) και (12).

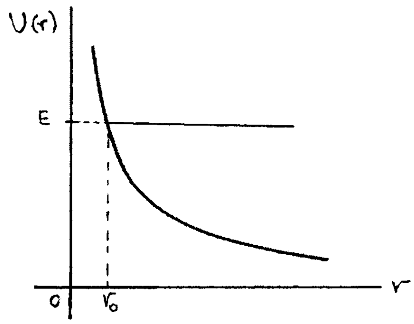
4.3 Κεντρικές δυνάμεις ανάλογες του αντιστρόφου τετραγώνου

Μια μεγάλη κατηγορίας κεντρικών δυνάμεων έχουν τη μορφή,

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \qquad (13)$$

όπου $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από την αρχή των αξόνων προς το σημείο όπου εφαρμόζεται η δύναμη $\vec{F}$. Αν είναι k>0 η δύναμη είναι απωστική, ενώ για k<0, η δύναμη είναι ελκτική.

Σχήμα 3 Η ενεργός δυναμική ενέργεια U(r) για απωστικές δυνάμεις αντιστρόφου τετραγώνου



Η δυναμική ενέργεια για την δύναμη (13) (εφόσον όλες οι κεντρικές δυνάμεις είναι συντηρητικές) υπολογίζεται,

$$V(r) - V(\infty) = -W_{\infty \to r} = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{k}{r^2}(d\vec{r} \cdot \hat{r}),$$

όπου $W_{\infty \to r}$ είναι το απαιτούμενο έργο για τη μεταφορά του σώματος από το άπειρο στο σημείο r. Ακόμη επειδή $(d\vec{r} \cdot \hat{r}) = dr \cdot 1 \cdot \cos 0 = dr$, το ολοκλήρωμα γράφεται,

$$V(r) = -k\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{k}{r}, \qquad (14)$$

όπου έχουμε πάρει τη στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας ίση με μηδέν, $V(\infty)=0$. (Η σχέση (14) ισχύει για k θετικό ή αρνητικό και συνήθως γράφεται: $V=\pm|k|/r$). Η εξίσωση της ενέργειας (6) παίρνει τότε τη μορφή,

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right). \qquad (15)$$

Η ποσότης μέσα στη παρένθεση είναι η ενεργός δυναμική ενέργεια U(r). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(ι) Για k>0 που είναι η περίπτωση **απωστικού** δυναμικού, η U(r) μειώνεται μονότονα με το r όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Για κάθε θετική τιμή της ενέργειας E, το κινούμενο σώμα πλησιάζει μέχρι μιας ελαχίστης απόστασης r_o και ανακλάται πίσω στο άπειρο. Η τροχιά του σώματος είναι υπερβολή, όπως θα δούμε παρακάτω. Η απόσταση r_o είναι η ρίζα της εξίσωσης: U(r) = E, δηλ.

$$r^2 - \frac{k}{E} r - \frac{l^2}{2mE} = 0,$$

άρα

$$r_o = \frac{k}{2E}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\right) \qquad (16)$$

(ιι) Στη περίπτωση του **ελκτικού** δυναμικού k<0, η U(r) έχει τη μορφή του Σχήματος 1. Αν η ενέργεια είναι E=E_1 (δηλ. E<0), τότε το σώμα κινείται μεταξύ μιας ελαχίστης απόστασης r_1 και μιας μεγίστης r_2 από το κέντρο έλξης. Οι αποστάσεις r_1, r_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: U(r) = E, δηλ.

$$r_1 = \frac{k}{2E}(1-\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}), \qquad r_2 = \frac{k}{2E}(1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}). \qquad (17a)$$

και

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mk}{l^2}(1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}), \qquad \frac{1}{r_2} = -\frac{mk}{l^2}(1-\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}). \qquad (17b)$$

Η τροχιά του σώματος είναι περιοδική και μάλιστα **ελλειπτική** (βλέπε Σχήμα 4), όπως θα δούμε παρακάτω. Για ενέργειες E≥0, το κινούμενο σώμα πλησιάζει μέχρι μιας ελαχίστης απόστασης $r_o = \frac{-k}{2E}(-1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}})$ και ανακλάται πίσω στο άπειρο και η τροχιά είναι **υπερβολική**. Τέλος, στο πυθμένα του φρεατίου του Σχήματος 1 (απόσταση $R_o \equiv \frac{l^2}{-km} > 0$), η ενέργεια ισούται με $E = E_o \equiv -\frac{mk^2}{2l^2}$ (η ελαχίστη τιμή της U), οπότε από την (15) έπεται ότι $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$, δηλ. $\dot{r} = 0$, που σημαίνει ότι η **ακτινική** ταχύτης είναι μηδέν. Αυτή όμως είναι η περίπτωση της **κυκλικής** τροχιάς.

4.4 Η εξίσωση της τροχιάς

Στη παραπάνω συζήτηση είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε τις μεταβλητές r και θ ως συναρτήσεις του χρόνου με σταθερές ολοκλήρωσης τις E και *l*. Συχνά όμως αναζητούμε να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς, δηλ. την συνάρτηση r=r(θ), εξαλείφοντας την παράμετρο t. Στη περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων, η απαλειφή του χρόνου είναι εύκολη, καθόσον ο χρόνος υπεισέρχεται στις εξισώσεις κίνησης μόνο σαν μεταβλητή διαφόρισης. Απαλείφοντας τον χρόνο μεταξύ των εξισώσεων (5) και (6), πρέπει να οδηγηθούμε στην επιθυμητή σχέση. Πράγματι, η (5) γράφεται,

$$dt = \frac{mr^2}{l}d\theta \qquad (18)$$

οπότε, η αντιστοιχία μεταξύ των παραγώγων ως προς t και θ είναι,

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}, \qquad (19a)$$

και έπεται η δεύτερη παράγωγος,

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}). \qquad (19b)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να μετατρέψουν την εξίσωση κίνησης, (3-55), σε διαφορική εξίσωση για τη τροχιά. Πράγματι, η εξίσωση Lagrange για το r, (3-55),

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m}\frac{1}{r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

γράφεται,

$$m\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{l^2}{m}\frac{1}{r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}. \qquad (20)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση:

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{du}{d\theta},$$

όπου u=1/r, η (20) γράφεται,

$$\frac{l^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{\partial V}{\partial u}. \qquad (21)$$

Για **κεντρικές δυνάμεις** που ακολουθούν το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου, βρήκαμε από την (14) ότι V=k/r =ku, άρα $\frac{\partial V}{\partial u} = k$, και συνεπώς η (21) γράφεται,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{l^2}$$

ή

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(u + \frac{mk}{l^2}\right) = 0$$

Θέτοντας $y = u + \frac{mk}{l^2}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται,

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

η οποία έχει τη μορφή της εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή, συχνότητος ω=1, όπου η γωνία θ παίζει τον ρόλο του χρόνου t. Η λύση είναι,

$$y = A\cos(\theta - \theta_o),$$

όπου A,θ_o οι σταθερές ολοκλήρωσης. Η λύση αυτή γράφεται συναρτήσει του r,

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}[-1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_o)], \qquad (22)$$

όπου $\frac{mk}{l^2}\varepsilon = A$. Η λύση αυτή παριστάνει μια **κωνική τομή** (έλλειψη, παραβολή, ή υπερβολή) με την αρχή των αξόνων (r=0) να καταλαμβάνει την μια εστία της τομής. Η σταθερά θ_o είναι η γωνία μεταξύ του άξονα x και της γραμμής των αψίδων (η γραμμή από την αρχή 0 προς το περιήλιο) όπως φαίνεται στο Σχήμα 4 για ελλειπτική τροχιά.

Για συγκεκριμένη κατηγορία δυνάμεων, η εξίσωση της τροχιάς μπορεί να εξαχθεί από την ολοκλήρωση της (21), όμως δεν είναι αναγκαίο να ολοκληρωθούν οι εξισώσεις κίνησης εξ αρχής, καθόσον η πρώτη ολοκλήρωσή τους έχει ήδη γίνει και έχει οδηγήσει στις εξισώσεις (5) και (6). Το μόνο που απομένει είναι η απαλειφή του t από την (9), κάνοντας χρήση της (18):

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = \frac{mr^2}{l}\,\mathrm{d}\theta$$

Αναδιοργανώνουμε όρους και ολοκληρώνουμε,

$$\int \mathrm{d}\theta = \int \frac{l}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή u=1/r, παίρνομε

$$\theta = \theta' - \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}}, \qquad (23)$$

όπου θ' είναι η σταθερά ολοκλήρωσης που υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Τυπικά η εξίσωση της τροχιάς έπεται μετά την ολοκλήρωση της (23).

Για κεντρικές δυνάμεις που ακολουθούν το νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου, V=k/r =ku, οπότε το ολοκλήρωμα στην (23) γράφεται,

$$\theta - \theta' = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mk}{l^2}u - u^2}}, \qquad (24)$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι της μορφής

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\cos^{-1}\left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$$

συνεπώς η (24) γράφεται

$$\theta - \theta' = -\cos^{-1}\left(\frac{\frac{k}{|k|} + \frac{l^2 u}{m|k|}}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}\right), \qquad (25)$$

οπότε αντιστρέφοντας την (25), προκύπτει η λύση, συναρτήσει του r,

$$\frac{1}{r}=\frac{m|k|}{l^2}[-\frac{k}{|k|}+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')]\,.$$

Για k<0,

$$\frac{1}{r}=-\frac{mk}{l^2}[1+\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta-\theta')]\,,\qquad (26)$$

η οποία συμφωνεί με την (22). Μάλιστα συγκρίνοντας με τις (17b), η σταθερά ολοκλήρωσης θ' μπορεί να ταυτιστεί με την γωνία θ_o ή $\pi+\theta_o$ στα σημεία αντιστροφής r_1 ή r_2.

Η γενική λύση (26) παριστάνει μια **κωνική τομή** με την αρχή των αξόνων να καταλαμβάνει την μια εστία της τομής. Γενικά μια κωνική τομή έχει τη μορφή,

$$\frac{1}{r}=C\big(1+\varepsilon\cos(\theta-\theta')\big),\qquad (27)$$

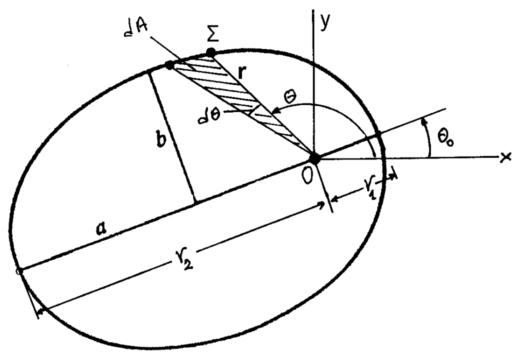
όπου η σταθερά ε καλείται **εκκεντρότης** της κωνικής τομής. Συγκρίνοντας με την (26) έχομε,

$$C=-\frac{mk}{l^2}\quad \text{και}\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}\,.\qquad (28)$$

Η φύση των τροχιών εξαρτάται από το μέτρο της ε, κατά το ακόλουθο σχήμα:

για $\varepsilon>1$, και $E>0$:	υπερβολική
για $\varepsilon=1$, και $E=0$:	παραβολική
για $\varepsilon<1$, και $E<0$:	ελλειπτική
για $\varepsilon=0$, και $E=E_o\equiv-\dfrac{mk^2}{2l^2}$:	κυκλική

Η ταξινόμηση αυτή συμφωνεί με την ποιοτική συζήτηση που προηγήθηκε πάνω στη ενεργό δυναμική ενέργεια U.



Σχήμα 4 Ελλειπτική τροχιά με ημιάξονες a και b

<u>Ελλειπτική τροχιά:</u>

Θα εστιάσομε το ενδιαφέρον μας στην ελλειπτική τροχιά του Σχήματος 4. Ο μεγάλος ημιάξονας a ισούται με το ημιάθροισμα των αποστάσεων στα σημεία αναστροφής, του Σχήματος 1 ή 4,

$$a = \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2)\,, \quad (29)$$

οπότε λαμβάνοντας υπόψιν τις (17a), η τιμή του μεγάλου ημιάξονα είναι,

$$a = \frac{k}{2E} \qquad (30a)$$

και του μικρού ημιάξονα,

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = a\sqrt{-\frac{2El^2}{mk^2}} = a^{1/2}\sqrt{-\frac{l^2}{mk}}\,. \qquad (30b)$$

Υπολογίζομε στη συνέχεια την περίοδο T της ελλειπτικής τροχιάς. Κατ’ αρχήν το εμβαδόν που σαρώνει η επιβατική ακτίνα είναι $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ (**επιβατική ακτίνα** είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος Σ όταν έχουμε επιλέξει την μια εστία της κωνικής τομής ως αρχή των αξόνων, Σχήμα 4) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση διατήρησης της στροφορμής (5), μπορούμε να απαλείψομε τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$, οπότε βρίσκουμε

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m}\,. \qquad (31)$$

Το εμβαδόν της ελλειπτικής τροχιάς έπεται από την (31), ολοκληρώνοντας πάνω σε μια πλήρη περίοδο T,

$$A = \int_o^T \frac{dA}{dt}dt = \frac{l}{2m}\int_o^T dt = \frac{lT}{2m}\,. \qquad (32)$$

Η εξίσωση (31) είναι ο 2ος νόμος του Kepler (δηλ. η ταχύτης σάρωσης από την επιβατική ακτίνα είναι σταθερή). Το εμβαδόν όμως της έλλειψης είναι A=πab:, οπότε η (32) γράφεται

$$A = \pi ab = \pi a^{2/3}\sqrt{\frac{l^2}{m|k|}} = \frac{lT}{2m}$$

άρα

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{|k|}} \qquad (33)$$

δηλ. το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου της μεγάλου ημιάξονα και αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστό σαν 3ος νόμος του Kepler. Τέλος, η μελέτη της υπερβολικής τροχιάς και της κυκλικής τροχιάς αφήνεται σαν άσκηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ΣΕΙΡΑ 5

1. Σώμα μάζας m κινείται μέσα σε απωστικό πεδίο $V=r^{\alpha}$, $-2<\alpha<\infty$. Να ευρεθεί η τιμή του α για την οποίαν η τροχιά του σώματος είναι κυκλική.

2. Σώμα κινείται σε ελλειπτική τροχιά μέσα σε πεδίο δυνάμεων αντιστρόφου τετραγώνου. (α) Βρείτε την μεγίστη και την ελαχίστη γωνιακή ταχύτητα του σώματος. (β) Αν ο λόγος της μεγίστης προς την ελαχίστη γωνιακή ταχύτητα είναι η, δείξετε ότι η εκκεντρότης της τροχιάς ισούται με : $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\eta}-1}{\sqrt{\eta}+1}$.

3. Υπολογίσετε προσεγγιστικά το λόγο των μαζών του Ηλίου προς της Γης, χρησιμοποιώντας μόνο τις διάρκειες του έτους (365 μέρες) και του Σεληνιακού μήνα (27.3 μέρες) και τις μέσες ακτίνες της τροχιάς της Γης (1.49×10^{8} Km) και της τροχιάς της Σελήνης (3.8×10^{5} Km).