ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

3.1 Συντηρητικές δυνάμεις

Στο κεφάλαιο αυτό γενικεύουμε στις 3 διαστάσεις ό,τι εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της κίνησης ενός σωματιδίου υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας m στις 3D ορίζεται

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad (1)$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι το **διάνυσμα θέσης** του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε,

$$dT = m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})\, dt = \vec{\upsilon} \cdot m\vec{a}\, dt = \vec{\upsilon} \cdot \vec{F}\, dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

οπότε ο ρυθμός μεταβολής της κιν. ενέργειας είναι

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\upsilon} \cdot \vec{F} \qquad (3)$$

όπου $\vec{\upsilon} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ και $\vec{\upsilon}dt = d\vec{r}$. Όμως $\vec{F} \cdot d\vec{r} = dW$, είναι ο ορισμός του στοιχειώδους έργου δύναμης στις 3D. Αν ολοκληρώσουμε την (2) μεταξύ των σημείων $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$, καταλήγουμε στο **θεώρημα έργου-ενέργειας** που λέει ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το προσφερόμενο έργο, δηλ. ΔT=W, όπου $\Delta T \equiv T_2 - T_1$ είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας και

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (4)$$

είναι το παραγόμενο έργο από τη δύναμη $\vec{F}$ μετακινώντας το σωματίδιο από το σημείο: $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$. Το έργο αυτό συμβολίζεται επίσης και ως: $W_{\vec{r}_1 \to \vec{r}_2}$ για να τονιστούν τα δύο ακραία σημεία της μετακίνησης. Στη περίπτωση συντηρητικών δυνάμεων, ολοκληρώνοντας την εξίσωση κίνησης λαμβάνουμε την ολική ενέργεια του σωματιδίου,

$$E = T + V, \qquad (5)$$

η οποία είναι σταθερή, όπου η δυναμική ενέργεια ορίζεται,

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -W_{\vec{r}_1 \to \vec{r}_2} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (6)$$

Η στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας $V(\vec{r}_1)$ είναι αυθαίρετη και συνήθως λαμβάνεται ίση με μηδέν. Η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση του $\vec{r} = (x, y, z)$, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό dV,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

και την παράγωγό της ως προς t (ή άλλως, τον ρυθμό μεταβολής της ως προς τον χρόνο),

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} \qquad (7)$$

Το σύμβολο $(\vec{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z})$ καλείται **τελεστής ανάδελτα** ή **del** και συμβολίζεται με $\vec{\nabla}$ ή grad, όπου $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ τα 3 μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των 3 καρτεσιανών αξόνων. Οπότε, το δεύτερο μέρος της (7) μπορεί να γραφεί,

$$\frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{\upsilon}$$

και συνεπώς η (7) γράφεται,

$$\frac{dV}{dt} = \vec{\nabla} V \cdot \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla} V$$

Το εσωτερικό γινόμενο (·) μεταξύ δύο διανυσμάτων υποστηρίζει την αντιμεταθετική ιδιότητα $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Γυρνάμε τώρα στη (5), την οποίαν παραγωγίζομε ως προς t (για E=const),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \\ &= \vec{\upsilon} \cdot \vec{F} + \vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla} V \end{aligned}$$

όπου έχομε λάβει υπόψιν τις εξισώσεις (3) και (7), απ' όπου προκύπτει,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \qquad (8)$$

(δηλ. $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, ...) Η σχέση βέβαια αυτή προκύπτει απ' ευθείας από την (6), παραγωγίζοντάς την ως προς $\vec{r}$ (! πώς;). Πράγματι, οι σχέσεις (8) και (6) είναι αντίστροφες!

Έχομε δει ότι για να οριστεί η δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με μια δύναμη, θα πρέπει η δύναμη αυτή να είναι **συντηρητική** και τότε ορίζεται η V από την (6). Τίθεται βέβαια το ερώτημα πότε μια δύναμη είναι συντηρητική. Μια μερική απάντηση σ' αυτό είναι το εξής: όταν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην (6) δεν εξαρτάται από το δρόμο ολοκλήρωσης που ενώνει τα σημεία $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, αλλά μόνο από τα ακραία σημεία. Και πάλι αυτό δεν δίδει πρακτική απάντηση. Μπορούμε εκμεταλλευόμενοι την (8) να εκμαιεύσουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια δύναμη συντηρητική. Ορίζεται ως **στροβιλισμό** ή **curl** μιας διανυσματικής ποσότητος $\vec{A}$, το εξωτερικό γινόμενο,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}) \times (\vec{\mathbf{i}}A_x + \vec{\mathbf{j}}A_y + \vec{\mathbf{k}}A_z)$$

$$= \vec{\mathbf{i}}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \vec{\mathbf{j}}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \vec{\mathbf{k}}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

Αν πάρουμε ως διάνυσμα $\vec{A}$ το διάνυσμα $\vec{\nabla}V$, η προηγούμενη σχέση δίδει: $\vec{\mathbf{i}}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) =$ $\vec{\mathbf{i}}(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}) = 0$ και ομοίως και για τις άλλες συνιστώσες. Συνεπώς, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = 0$ και αυτό το αποτέλεσμα μας οδηγεί στην αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η δύναμη $\vec{F}$ να είναι συντηρητική: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}V) = 0$, δηλ.

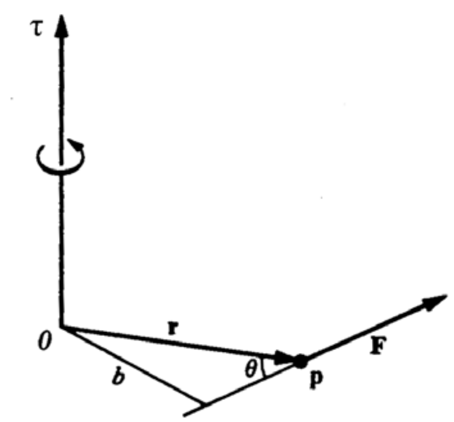
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \qquad (9)$$

Ορίζεται **ροπή (**ως προς το σημείο 0) **δύναμης** $\vec{F}$ που ασκείται πάνω σ'ένα σωμάτιο στη θέση $\vec{r}$, το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (10)$$

Η διεύθυνση του διανύσματος της ροπής $\vec{\tau}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ (βλέπε Σχήμα 1). Αν και η ροπή είναι ελεύθερο διάνυσμα, εν τούτοις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ροπή βρίσκεται πάνω στον άξονα που τείνει να περιστρέψει η δύναμη το σωματίδιο. Το μέτρο της ροπής είναι τ=rF sinθ (όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{r}$ και $\vec{F}$).

Σχήμα 1 Το διάνυσμα της ροπής $\vec{\tau}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{F}$



Παρομοίως ορίζεται ως **στροφορμή (**ως προς το σημείο 0) ενός σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση $\vec{r}$, το διανυσματικό γινόμενο

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (11)$$

όπου $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ είναι η ορμή του σωματιδίου. Το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{\ell}$ ορίζεται κατά παρόμοιο τρόπο με εκείνο του $\vec{\tau}$ στο Σχήμα 1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι: $\frac{d\vec{\ell}}{dt} =$ $\underbrace{\vec{\upsilon} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$, καθόσον $\vec{\upsilon} \times \vec{p} = \vec{\upsilon} \times m\vec{\upsilon} = 0$ και $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ από τον 2^{o} νόμο του Νεύτωνα. Συνεπώς προκύπτει η σχέση,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \qquad (12)$$

η οποία εκφράζει την εξίσωση της περιστροφικής κίνησης (σε μιά της μορφή).

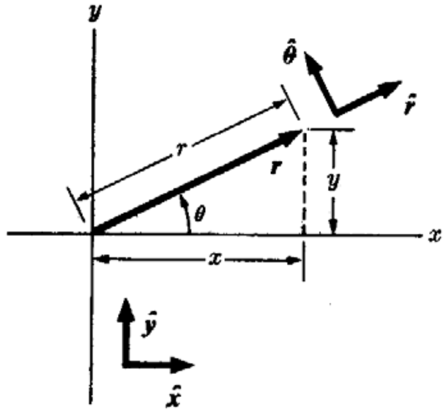
3.2 Κεντρικές δυνάμεις

Μια εξωτερική δύναμη καλείται κεντρική αν έχει τη μορφή,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{r}\, f(r) \qquad (13)$$

όπου $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ (βλέπε Σχήμα 2). Κατά τον ορισμό της (13), η δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ κατευθύνεται προς (ή από) κάποιο συγκεκριμένο σημείο, το οποίο λαμβάνεται σαν αρχή των συντεταγμένων 0.

Σχήμα 2 Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ και τα μοναδιαία διανύσματα σε πολικές $\hat{r}, \hat{\theta}$ και καρτεσιανές συντεταγμένες. $\hat{x}, \hat{y}$.



Η ροπή που ασκεί μια κεντρική δύναμη πάνω στο σώμα είναι μηδέν, πράγματι,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} \times \hat{r}\, f(r) = 0$$

διότι $\vec{r} \times \hat{r} = 0$. Από αυτό συνεπάγεται και λαμβάνοντας υπόψιν την (12) ότι η στροφορμή στη περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων διατηρείται σταθερή, $\vec{\ell}$=σταθ., και κατά διεύθυνση και κατά μέτρο, δηλ. το διάνυσμα της στροφορμής παραμένει κάθετο προς το επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα του σώματος. Για παράδειγμα, η Γη κατά την ελλειπτική περιφορά της γύρω από τον Ήλιο παραμένει μέσα στο ίδιο επίπεδο, εφόσον η ελκτική δύναμη που δέχεται (κυρίως) από τον Ήλιο είναι κεντρική. Το αποτέλεσμα αυτό (δηλ. της διατήρησης της στροφορμής) εκφράζει (υπό διαφορετική διατύπωση) τους δύο πρώτους νόμους του Kepler. Για να εκτιμήσουμε καλύτερα το δεύτερο αποτέλεσμα, μας είναι βολικό να εργαστούμε σε πολικές συντεταγμένες.

Οι **πολικές συντεταγμένες** (r, θ) σχετίζονται με τις καρτεσιανές πάνω στο επίπεδο (x,y) με τις ακόλουθες σχέσεις (βλέπε Σχήμα 2),

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad (14a)$$

ή

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \qquad (14b)$$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}, \hat{\theta}$ (όπου $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$) ορίζονται κατά τις διευθύνσεις που αυξάνονται τα αντίστοιχα μεγέθη r,θ (βλέπε Σχήμα 2) και σχετίζονται με τα μοναδιαία καρτεσιανά διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}$ (όπου $|\hat{x}| = |\hat{y}| = 1$) από τις σχέσεις,

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta,$$
$$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta. \qquad (15)$$

Παραγωγίζοντας τις (15), λαμβάνουμε τα ενδιαφέροντα αποτελέσματα,

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \qquad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}. \quad (16)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητος και της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες. Πράγματι, αν το διάνυσμα θέσης (ενός σώματος) είναι,

$$\vec{r} = r\,\hat{r},$$

[όπου $\hat{r} = \hat{r}(\theta)$] τότε παραγωγίζοντας ως προς t, υπολογίζουμε το διάνυσμα της ταχύτητος,

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta} \qquad (17)$$

(όπου ω=dθ/dt είναι η γωνιακή ταχύτης) απ'όπου λαμβάνουμε τις δύο συνιστώσες της ταχύτητος κατά τις διευθύνσεις $\hat{r}, \hat{\theta}$ (ακτινική και εγκάρσια),

$$\upsilon_r = \frac{dr}{dt}, \qquad \upsilon_\theta = r\omega. \quad (18)$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης υπολογίζεται κατ' ανάλογο τρόπο,

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} &= (\frac{d^2 r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}) + (\frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} + r\omega\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}) \\
&= (\frac{d^2 r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\hat{\theta}\omega) + (\frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} - r\omega^2\hat{r}) \\
&= (\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2)\hat{r} + (2\omega\frac{dr}{dt} + r\alpha)\hat{\theta} \qquad (19)
\end{aligned}$$

(όπου α=dω/dt= $d^2\theta/dt^2$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση) απ'όπου λαμβάνουμε τις δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά τις διευθύνσεις $\hat{r}, \hat{\theta}$ (ακτινική και εγκάρσια),

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2, \qquad a_\theta = 2\omega\frac{dr}{dt} + r\alpha \qquad (20)$$

Ο όρος $-r\omega^2$ στην ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης καλείται **κεντρομόλος επιτάχυνση**, ενώ ο όρος $2\omega\frac{dr}{dt}$ στην εγκάρσια συνιστώσα καλείται **επιτάχυνση Coriolis** (πιο σωστά, $2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_r$).

Γυρνώντας τώρα στην στροφορμή, σε πολικές συντεταγμένες λαμβάνοντας υπόψιν τη (17) ή (18) έχουμε,

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} = \vec{r}\times m(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}) = mr^2\omega\,\hat{r}\times\hat{\theta} = mr^2\omega\,\hat{z} \qquad (21)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ κάθετο στα $\hat{r}, \hat{\theta}$, δηλ. $\hat{z} = \hat{r}\times\hat{\theta}$. Μάλιστα, τα $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$ είναι τα 3 μοναδιαία διανύσματα στις **κυλινδρικές συντεταγμένες** (r, θ, z). Το γεγονός ότι στη περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων, $\vec{\ell}$=σταθ., οδηγεί στη σχέση: $\frac{1}{2}r^2\omega = \ell/2m$ = σταθ. Όμως η ποσότης $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ παριστάνει το εμβαδόν που σαρώσει η επιβατική ακτίνα (δηλ. το διάνυσμα θέσης), οπότε ο ρυθμός μεταβολής $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{\ell}{2m}$=σταθ., που είναι γνωστός σαν 2ος νόμος του Kepler στη κίνηση των πλανητών.

Πριν κλείσουμε το εδάφιο αυτό, θα υπενθυμίσουμε ένα ακόμη σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, συγκεκριμένα το σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων. Οι **σφαιρικές συντεταγμένες** (r, θ, φ) ορίζονται, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, από τις ακόλουθες σχέσεις

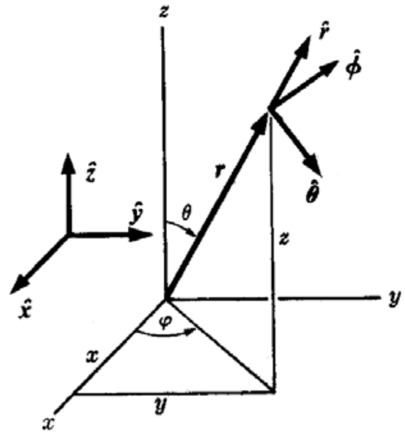
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad (22a)$$

ή

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,\quad \theta=\tan^{-1}\sqrt{x^2+y^2}\,/\,z\,,\quad \varphi=\tan^{-1}y/x \qquad (22b)$$

Ελπίζω να μην δημιουργηθεί σύγχυση, επειδή χρησιμοποιώ το ίδιο σύμβολο r και για τα δύο συστήματα συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, στο σύστημα πολικών συντεταγμένων, η συντεταγμένη r (όπου $r=\sqrt{x^2+y^2}$) βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (x, y), ενώ στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων, η συντεταγμένη r (όπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$) βρίσκεται στο 3D χώρο. Πάντως, και στα δύο συστήματα, r είναι το μέτρο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ (βλέπε Σχήματα 2 και 3).

Σχήμα 3 Σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ)



Τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$ ($|\hat{r}|=|\hat{\theta}|=|\hat{\varphi}|=1$) ορίζονται κατά τις διευθύνσεις που αυξάνονται τα αντίστοιχα μεγέθη r,θ,φ (βλέπε Σχήμα 3) και σχετίζονται με τα μοναδιαία καρτεσιανά διανύσματα $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ ($|\hat{x}|=|\hat{y}|=|\hat{z}|=1$) από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= +\hat{z}\cos\theta+\hat{x}\sin\theta\cos\varphi+\hat{y}\sin\theta\sin\varphi \\
\hat{\theta} &= -\hat{z}\sin\theta+\hat{x}\cos\theta\cos\varphi+\hat{y}\cos\theta\sin\varphi \\
\hat{\varphi} &= -\hat{x}\sin\varphi+\hat{y}\cos\varphi
\end{aligned} \qquad (23)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (23), λαμβάνουμε τα αποτελέσματα,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\hat{r}}{d\theta}=\hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{r}}{d\varphi}=\hat{\varphi}\sin\theta, \\
&\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=-\hat{r}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\varphi}=\hat{\varphi}\cos\theta, \\
&\frac{d\hat{\varphi}}{d\theta}=0, \quad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}=-\hat{r}\sin\theta-\hat{\theta}\cos\theta
\end{aligned} \qquad (24)$$

Στις σφαιρικές συντεταγμένες, το διάνυσμα θέσης δίδεται από τη σχέση,

$$\vec{r} = r\,\hat{r}\,,$$

[όπου $\hat{r} = \hat{r}(\theta,\varphi)$] την οποίαν παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας τις (24), λαμβάνουμε το διάνυσμα της ταχύτητος και της επιτάχυνσης, αντίστοιχα

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\omega\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} &= (\ddot{r} - r\omega^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\hat{r} + (2\omega\dot{r} + r\alpha - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\hat{\theta} \\ &+ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\sin\theta\,\dot{\varphi} + 2\omega r\cos\theta\,\dot{\varphi})\,\hat{\varphi}\end{aligned} \quad (26)$$

όπου ω=dθ/dt είναι η γωνιακή ταχύτης και α=dω/dt= $d^2\theta/dt^2$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση. Ακόμα, επειδή τα μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi})$ αποτελούν ένα σύνολο αμοιβαίων ορθογωνίων διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα $\vec{A}$ μπορεί να παρασταθεί συναρτήσει των σφαιρικών του συντεταγμένων,

$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi} \qquad (27)$$

και το μέτρο του θα ισούται με

$$A^2 = A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2\,. \qquad (28)$$

Η κινητική ενέργεια για παράδειγμα μπορεί να εκφραστεί στα τρία συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανές, κυλινδρικές, και σφαιρικές) που περιγράψαμε παραπάνω ως εξής,

(καρτεσιανές) $\quad T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)$

(κυλινδρικές) $\quad T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + \upsilon_z^2) \qquad (29)$

(σφαιρικές) $\quad T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$

Έχοντας υπολογίσει τις επιταχύνσεις στα συστήματα αυτά, θα μπορούσαμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης. Ωστόσο είναι πιο βολικό να γράψουμε τις εξισώσεις αυτές σε αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο που οφείλεται στον Lagrange.

3.3 Λογισμός των μεταβολών

Ένα βασικό πρόβλημα του απειροστικού λογισμού είναι να βρούμε την καμπύλη εκείνη για την οποίαν ένα δεδομένο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ακρότατο. Θεωρούμε κατ' αρχήν το πρόβλημα στην 1D. Συγκεκριμένα, θέλουμε να βρούμε ένα δρόμο (path) S μεταξύ των σημείων (x_o,y_o) και (x_1,y_1), ο οποίος περιγράφεται από κάποια συνάρτηση,

$$y = y(x), \qquad (30)$$

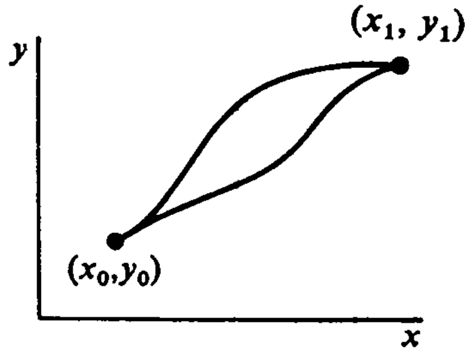
η οποία να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες (βλέπε Σχήμα 4),

$$y_o = y(x_o), \quad y_1 = y(x_1) \qquad (31)$$

τέτοιο ώστε το ολοκλήρωμα

$$J = \int_{x_o}^{x_1} f(y, y', x)\, dx \qquad (32)$$

να είναι ακρότατο, δηλ. μέγιστο ή ελάχιστο, όπου $y'=dy/dx$.



Σχήμα 4 Διάφοροι δρόμοι στο 1D πρόβλημα ακρότατων (το διάγραμμα δεν είναι στο μορφικό χώρο)

Ας υποθέσουμε ότι κάθε πιθανός δρόμος S_i από το σημείο (x_o,y_o) στο (x_1,y_1) χαρακτηρίζεται από τη τιμή κάποιας παραμέτρου α, τέτοιας ώστε ο επιθυμητός δρόμος (ή δρόμοι) που δίδουν το ακρότατο στο ολοκλήρωμα (32) να ορίζεται για ορισμένη τιμή του α, ας πούμε για α=0. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τον κάθε πιθανό δρόμο από τη παραμετρική σχέση,

$$y(x,\alpha) = y(x,\alpha{=}0) + \alpha\, \eta(x), \qquad (33)$$

όπου η συνάρτηση η(x) εξαρτάται μόνο από το x και μηδενίζεται στα ακραία σημεία, $\eta(x_o)=\eta(x_1)=0$. Χρησιμοποιώντας μια τέτοια παραμετρική αναπαράσταση, όπως η (33), το ολοκλήρωμα στη (32) γράφεται

$$J(\alpha) = \int_{x_o}^{x_1} f(y(x,\alpha), y'(x,\alpha), x)\, dx \qquad (34)$$

Το συναρτησοειδές J (διότι το πεδίο ορισμού του είναι ο χώρος των καμπύλων) είναι παραγωγίσιμο. Για να έχομε ακρότατη τιμή στο J, θα πρέπει να ισχύει

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0\,, \quad (35)$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς α την (34) βρίσκομε,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_o}^{x_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right\} dx\,. \qquad (36)$$

Ο $2^{ος}$ όρος μέσα στο ολοκλήρωμα (36) μπορεί να γραφεί,

$$\int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) dx$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνομε,

$$= \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{x_o}^{x_1} - \int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \qquad (37)$$

Όμως από την υπόθεση (33) προκύπτει ότι: $y'_\alpha \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$ και επειδή η συνάρτηση η(x) μηδενίζεται στα ακραία σημεία, έπεται ότι: $y'_\alpha(x_1) = y'_\alpha(x_o) = 0$, άρα ο $1^{ος}$ όρος στην (37) μηδενίζεται, και συνεπώς η (36) γράφεται

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_o}^{x_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right\} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx \qquad (38)$$

Για να πάρομε την συνθήκη των ακρότατων, πολλαπλασιάζομε και τα δύο μέρη της (38) επί dα, και υπολογίζομε τη παράγωγο στη τιμή α=0,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \int_{x_o}^{x_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha\, dx \qquad (39)$$

Η ποσότης $\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha = \delta J$ καλείται **μεταβολή** (variation) του J και ομοίως $\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$.

Εδώ η μεταβολή δy παριστάνει μια αυθαίρετη μεταβολή του y, που προκύπτει από μια στοιχειώδη μεταβολή της παραμέτρου α από τη μηδενική της τιμή. Εφόσον η μεταβολή δy είναι αυθαίρετη, θα πρέπει η μεταβολή δJ να μηδενίζεται ,

$$\delta J = \int_{x_o}^{x_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right\} \delta y\, dx = 0$$

απ'όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση ολοκλήρωσης (δηλ. η αγκύλη) πρέπει να μηδενίζεται,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,. \qquad (40)$$

Επομένως, το συναρτησοειδές J έχει ακρότατο μόνο για εκείνες τις καμπύλες y(x), για τις οποίες η f ικανοποιεί την εξίσωση (40), η οποία μοιάζει με την εξίσωση Lagrange.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο συντομώτερος δρόμος μεταξύ των σημείων (x_o,y_o) και (x_1,y_1) στο επίπεδο.

Όλοι βέβαια γνωρίζομε ότι η ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία είναι η απάντηση του προβλήματος, $y - y_o = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}(x - x_o)$, όμως εφαρμόζοντας την προηγούμενη θεωρία μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Πράγματι, γνωρίζομε ότι το μήκος της τόξου μεταξύ των δύο σημείων είναι

$$I = \int_{x_o}^{x_1} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$

Η απαίτηση ότι το τόξο να είναι ο συντομώτερος δρόμος οδηγεί στη συνθήκη το I να είναι ελάχιστο. Αυτό αποτελεί ένα παράδειγμα του προβλήματος των ακρότατων όπως εκφράζεται από την (32) με

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \quad .$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

και αντικαθιστώντας στην (40), παίρνομε

$$\frac{d}{dx}(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}) = 0$$

συνεπώς

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c : \sigma\tau\alpha\theta$$

και λύνοντας ως προς y' βρίσκουμε,

$$y' = \alpha : \sigma\tau\alpha\theta,$$

η οποία ολοκληρούμενη δίδει:

$$y = \alpha x + \beta$$

έτσι φθάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα., χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες για να υπολογίσουμε τις σταθερές (α,β).

Επιστρέφοντας πάλι στο πρόβλημα της θεωρίας των μεταβολών, μπορούμε να γενικεύσουμε το πρόβλημα στη περίπτωση που η συνάρτηση f εξαρτάται από n-μεταβλητές, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ και από τις παραγώγους των $y'_1, y'_2, ..., y'_n$. Τότε υπολογίζοντας τη μεταβολή του ολοκληρώματος J

$$\delta J = \delta \int_{x_o}^{x_1} f(y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n, x)\, dx \qquad (41)$$

και επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα από (33)-(40), οδηγούμαστε στις εξισώσεις

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'_i}) = 0, \ i = 1, ..., n \, . \quad (46)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές σαν **διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange** για το συναρτησοειδές J, οι λύσεις των οποίων παριστούν εκείνες τις καμπύλες για τις οποίες η μεταβολή του ολοκληρώματος της μορφής (41) μηδενίζεται.

Αν θέλει κανείς να δει τα ακριβή βήματα για την παραγωγή της (42), μπορεί να ακολουθήσει το κομμάτι αυτό, διαφορετικά να προχωρήσει στο επόμενο κομμάτι.
Όπως και προηγουμένως, η μεταβολή του ολοκληρώματος J στην (41) λαμβάνεται θεωρώντας το J ως συνάρτηση μιας παραμέτρου α, η οποία χαρακτηρίζει όλες τις πιθανές καμπύλες $y_i(x,\alpha)$. Οπότε μπορούμε να εισάγουμε την παράμετρο α θέτοντας,

$$\begin{aligned} y_1(x,\alpha) &= y_1(x,\alpha=0) + \alpha\, \eta_1(x), \\ y_2(x,\alpha) &= y_2(x,\alpha=0) + \alpha\, \eta_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (42) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

όπου οι $y_1(x,\alpha=0)$, $y_2(x,\alpha=0)$, … είναι οι λύσεις του προβλήματος των ακρότατων και οι $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$,… είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του x που μηδενίζονται στα ακραία σημεία, $\eta_i(x_o)=\eta_i(x_1)=0$. Ο υπολογισμός προχωρά όπως και προηγουμένως. Η μεταβολή του J δίδεται συναρτήσει των

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_o}^{x_1} \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha} d\alpha \right\} dx\,. \qquad (43)$$

Ο 2ος όρος μέσα στο ολοκλήρωμα (43) μέσα στο άθροισμα μπορεί να γραφεί,

$$\int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x \partial \alpha} dx = \int_{x_o}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right) dx$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέρη βρίσκουμε,

$$= \frac{\partial f}{\partial y_i'}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\bigg|_{x_o}^{x_1} - \int_{x_o}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\cdot \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} dx\,. \qquad (44)$$

Ο 1ος όρος στη (44) μηδενίζεται, διότι όλες οι καμπύλες y_i περνούν από τα σταθερά σημεία x_o, x_1, οπότε αντικαθιστώντας στην (43) παίρνουμε,

$$\delta J = \int_{x_o}^{x_1} \sum_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) \right\} \delta y_i \, dx \qquad (45)$$

όπου η μεταβολή δy_i είναι $\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$. Εφόσον οι συναρτήσεις y_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, οι μεταβολές δy_i είναι επίσης ανεξάρτητες, συνεπώς η μεταβολή δJ μηδενίζεται, εάν και μόνο εάν οι συντελεστές των δy_i στην (45) μηδενίζονται, δηλ.

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1,2,...,n\,, \quad (46)$$

η οποία παριστάνει την γενίκευση της (40) για πολλές μεταβλητές.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι οι εξισώσεις κίνησης σώματος ταυτίζονται με τις εξισώσεις Euler-Lagrange (για συντηρητικές δυνάμεις). Ορίζουμε σαν **συνάρτηση Lagrange** (ή Lagrangian),

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z)\,. \ (47)$$

Οι παράγωγοί της L είναι

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \qquad (48)$$

και παρόμοιες εκφράσεις για τις y και z συνιστώσες. Η εξίσωση κίνησης ($2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα) για την x-συνιστώσα είναι

$$\frac{d}{dt} p_x = F_x ,$$

η οποία μπορεί να γραφεί

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} . \qquad (49)$$

Η εξίσωση (49) έχει ακριβώς την μορφή των εξισώσεων Euler-Lagrange, που προκύπτουν κατ' αναλογίαν από την απαίτηση όπως το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{t_o}^{t_1} L dt \qquad (50)$$

να είναι ακρότατο. Το ολοκλήρωμα (50) καλείται **ολοκλήρωμα δράσης**. Φθάνουμε λοιπόν στην **αρχή του Hamilton** ή **αρχή της ελαχίστης δράσης** που λέει ότι η κίνηση ενός συστήματος από τη χρονική στιγμή $t_o \to t_1$ είναι τέτοια ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (50), όπου L=T-V, να είναι ακρότατο ως προς την επιλογή του δρόμου κίνησης. Η αρχή του Hamilton λέγεται και αρχή της ελαχίστης δράσης διότι το ολοκλήρωμα δράσης (50) όχι μόνο είναι ακρότατο, αλλά και ελάχιστο.

Η γενίκευση των εξισώσεων (49) για n-γενικευμένες συντεταγμένες, $q_1,q_2,\ldots,q_n$ και τις αντίστοιχες ταχύτητες είναι,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1,...,n . \qquad (51)$$

Οι εξισώσεις (51) είναι γνωστές σαν **εξισώσεις Lagrange**. Μπορούμε να ορίσουμε κατ'αναλογίαν με τις καρτεσιανές συντεταγμένες την **γενικευμένη ορμή**,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (52a)$$

και την **γενικευμένη δύναμη**,

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} . \qquad (52b)$$

Παράδειγμα: *Κίνηση σώματος στο επίπεδο.* Λαμβάνουμε τις πολικές συντεταγμένες (r,θ) σαν γενικευμένες μεταβλητές,

$$q_1 = r$$
$$q_2 = \theta.$$

Η ταχύτητα δίδεται από την (17)

$$\vec{\upsilon} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

όπου ω= $\dot{\theta}$, άρα η κινητική ενέργεια είναι,

$$T = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

και από την Lagrangian, L = T – L, υπολογίζουμε τις γενικευμένες ορμές

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\,,$$

συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι,

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

Η παρένθεση λαμβάνοντας υπόψιν την (21) παριστάνει την στροφορμή, οπότε η 2η εξίσωση γράφεται, $\frac{d\ell}{dt} = 0$, δηλ. η στροφορμή είναι σταθερή, $\ell = mr^2\dot{\theta} =$ σταθ.! Ακόμη, εφόσον η στρομορμή είναι σταθερή, η γωνιακή ταχύτης ισούται με $\dot{\theta} = \ell/(mr^2)$ και αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση παίρνουμε,

$$m\ddot{r} = mr\frac{\ell^2}{m^2r^4} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m}\frac{1}{r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη επί $\dot{r}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = -\tfrac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} - V(r) + E$$

όπου E είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Ακόμη, μετά από αναδιοργάνωση των όρων, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}) + V(r) = E$$

ή

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$$

και συγκρίνοντας με την (29), ανακαλύπτουμε μια φορά ακόμη την διατήρηση της ενέργειας, T+V = E =σταθ. για συντηρητικές δυνάμεις!

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ΣΕΙΡΑ 2

1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω δυνάμεις είναι συντηρητικές:
   (i) $F_x=ax+by^2$, $F_y=az+2bxy$, $F_z=ay+bz^2$
   (ii) $F_r=2ar\sin\theta\sin\varphi$, $F_\theta=ar\cos\theta\sin\varphi$, $F_\varphi=ar\cos\varphi$
2. (Διατομικό μόριο) Δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 συνδέονται μέσω ελατηρίου σταθεράς k, και μπορούν να ολισθαίνουν χωρίς τριβές κατά μήκος του άξονα x. (α) Γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για καθένα σώμα, και (β) αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή ταχύτητα.
3. Σώμα κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση της κεντρικής δύναμης
   $$F=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{\dot{r}^2-2\ddot{r}r}{c^2}\right)$$
   όπου r η απόσταση του σώματος από το κέντρο έλξης. Να ευρεθεί η γενικευμένη δυναμική ενέργεια η οποία δημιουργεί τέτοια δύναμη και από το αποτέλεσμα αυτό να γραφεί η Lagrangian του σώματος.