ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HAMILTON

Στο κεφάλαιο αυτό καλύπτεται η θεωρία των κεφαλαίων 11 και 13 του Kibble.

13.1 Κανονικές εξισώσεις Hamilton

Έχομε δει σε πολλά παραδείγματα τη χρησιμότητα της μεθόδου Lagrange που μας επιτρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματευτούμε με μια επέκταση της μεθόδου αυτής που οφείλεται στον Hamilton. Θεωρούμε λοιπόν ότι η Lagrangian του συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων $q_1,q_2,...,q_n$ και των αντίστοιχων γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$. Οι εξισώσεις Lagrange μπορούν να γραφούν

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \ \text{i=1,...,n} \qquad (1)$$

όπου p_i είναι η γενικευμένη συζυγής ορμή ,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \ \text{i=1,...,n.} \qquad (2)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις Lagrange μπορούμε να προσδιορίσουμε τη **κατάσταση του συστήματος** σε κάθε χρονική στιγμή, δηλ. να προσδιορίσουμε τις θέσεις και τις ταχύτητες των συνιστωσών σωματιδίων του συστήματος, υπολογίζοντας τις 2n γενικευμένες συντεταγμένες και ταχύτητες, $q_1,q_2,...,q_n$ και $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Εναλλακτικά, η κατάσταση του συστήματος θα μπορούσε εξ ίσου να προσδιοριστεί συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων q_k και ορμών p_k, οι οποίες ορίζονται μέσω των (2) συναρτήσει των $q_1,q_2,...,q_n$ και $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Οι σχέσεις (2) μπορούν (in principal) να λυθούν ως προς $\dot{q}_i$ συναρτήσει των $q_1,q_2,...,q_n$ και $p_1,p_2,...,p_n$, δηλ.

$$\dot{q}_i = f_i(q_1, q_2 \ldots, q_n, p_1, p_2 \ldots, p_n), \ \text{i=1,...,n.} \qquad (3)$$

Παράδειγμα. *Κινούμενο σωματίδιο στο επίπεδο* (βαθμοί ελευθερίας n=2). Παίρνουμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) ως γενικευμένες συντεταγμένες, οπότε οι γενικευμένες ορμές είναι,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

οπότε οι εξισώσεις (3) έχουν τη μορφή,

$$\dot{r} = p_r / m, \qquad \dot{\theta} = p_\theta / mr^2, \qquad (4)$$

οπότε η θέση (r,θ) και η ταχύτητα $\vec{\upsilon} = (\dot{r}, r\dot{\theta})$ του σωματιδίου προσδιορίζονται από τις τιμές των 2n μεταβλητών r, θ, p_r, και p_θ.

Ορίζουμε ως **συνάρτηση Hamilton** ή **Hamiltonian** (χαμιλτονιανή), την συνάρτηση,

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \qquad (5)$$

όπου οι μεταβλητές $\dot{q}$, που ορίζονται από τη (3), θεωρούνται συναρτήσεις των q και p, συνεπώς η χαμιλτονιανή θεωρηθείται συνάρτηση των q και p. Υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = (\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}.$$

Όμως, λόγω την (2), ο $3^{ος}$ και ο $2^{ος}$ όρος αλληλοαναιρούνται, επομένως καταλήγουμε στη εξίσωση

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \ \text{k=1,...,n.} \qquad (6)$$

Παρομοίως υπολογίζουμε τη παράγωγο της Η ως προς q_k,

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}$$

που και πάλι, λόγω την (2), ο $1^{ος}$ και ο $3^{ος}$ όρος αλληλοαναιρούνται, επομένως λαμβάνοντας υπόψιν και την (1) καταλήγουμε στη εξίσωση,

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \ \text{k=1,...,n.} \qquad (7)$$

Οι 2n εξισώσεις (6) και (7) καλούνται **κανονικές εξισώσεις του Hamilton**. Είναι οι εξισώσεις κίνησης με ανεξάρτητες μεταβλητές τα q και p. Ακόμη, είναι διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξεως, ενώ οι εξισώσεις Lagrange είναι 2ας τάξεως. Παραγωγίζοντες ακόμη τη χαμιλτονιανή (5) ως προς το χρόνο λαμβάνουμε μια ακόμη εξίσωση,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (8)$$

και αν οι ενέργειες T, V δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, τότε η χαμιλτονιανή είναι σταθερή.

Παράδειγμα: *Κίνηση σωματιδίου στο επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης.*

Η Langrangian του σωματιδίου ισούται με,

$$L = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

οπότε η χαμιλτονιανή θα ισούται,

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r),$$

και χρησιμοποιώντας τις (4), η χαμιλτονιανή γράφεται,

$$H = \tfrac{1}{2}\frac{p_r^2}{m} + \tfrac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + V(r)\,.$$

Το δεύτερο μέρος της εξίσωσης είναι απλά το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, T+V, οπότε η χαμιλτονιανή ισούται με την ολική ενέργεια. Αυτό ισχύει γενικά σε περιπτώσεις που η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. Κατόπιν των (6), βρίσκουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις Hamilton,

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \dot{r}, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m} = \dot{\theta}\,, \qquad (\beta)$$

δηλ. ξαναβρίσκουμε τις εξισώσεις (4). Οι άλλες δύο εξισώσεις Hamilton είναι [κατόπιν των (7)],

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^3}{mr^3} - \frac{dV}{dr} \qquad (\gamma)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad (\delta)$$

(Να υπενθυμίσω ότι οι παράγωγοι ($\dot{}$) εννούνται ως προς t) Η εξίσωση (δ) ολοκληρούμενη δίδει τον νόμο διατήρησης της στροφορμής ($l \equiv p_\theta = mr^2\dot{\theta}$),

$$l \equiv p_\theta = \text{σταθ.},$$

ενώ η εξίσωση (γ) γράφεται κατ' αρχήν,

$$\dot{p}_r = \frac{l^3}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη επί $\dot{r}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε,

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^3} + V(r) = E$$

(Η εξίσωση αυτή αναφέρεται και σαν **ακτινική εξίσωση της ενέργειας**). Η σταθερά ολοκλήρωσης E παριστάνει την ολική ενέργεια του σωματιδίου.

13.2 Νόμοι διατήρησης και κυκλικές συντεταγμένες

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξίσωση (12-4), ότι σε φυσικά συστήματα όπου η ταχύτητα δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, η κινητική ενέργεια είναι ομογενής τετραγωνική συνάρτηση των $\dot{q}_k$. Εφαρμόζοντας το **θεώρημα του Euler**, *το οποίο λέει ότι αν η συνάρτηση f είναι ομογενής τάξεως z ως προς ένα σύνολο μεταβλητών q_i, τότε ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = zf \, .$$

Στη περίπτωση της κινητικής ενέργειας και για z=2, έχομε

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \, .$$

Για συντηρητικά πεδία, η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από την ταχύτητα, οπότε από την (2) έχομε $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ και συνεπώς η χαμιλτονιανή (5) γράφεται,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \\ &= 2T - L = T + V. \end{aligned}$$

δηλ. σε φυσικά συστήματα όπου η ταχύτητα δεν εξαρτάται ρητά από τον χρόνο και με τον πρόσθετο περιορισμό ότι η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από την ταχύτητα (δηλ. σε συντηρητικά πεδία), η χαμιλτονιανή ισούται με την ολική ενέργεια.

Εάν η Langrangian (ή η χαμιλτονιανή) δεν εξαρτάται από μια συντεταγμένη, ας πούμε την q_k, τότε η εν λόγω συντεταγμένη καλείται **κυκλική** ή **αγνοήσιμη**, οπότε από τις εξισώσεις Lagrange (ή Hamilton) παίρνουμε,

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{ή } \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0),$$

άρα

$$p_k = \text{const.}, \qquad (9)$$

δηλ. η **γενικευμένη συζυγής ορμή** μιας κυκλικής συντεταγμένης q_k διατηρείται σταθερή. Για παράδειγμα, στην επίπεδη κίνηση ενός σωματιδίου που υπόκειται την επίδραση κεντρικής δύναμης, είδαμε προηγουμένως ότι η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τη γωνία θ, οπότε η γενικευμένη συζυγής ορμή $l \equiv p_\theta$ διατηρείται σταθερή, που το έχομε δει από άλλη σκοπιά. Η εξίσωση (9) αποτελεί το **πρώτο ολοκλήρωμα** των εξισώσεων κίνησης.

Οι νόμοι διατήρησης που αναφέραμε προηγουμένως σχετίζονται με συμμετρίες του συστήματος. Λόγου χάριν, η διατήρηση της στροφορμής οφείλεται στη περιστροφική συμμετρία του συστήματος, που εξ αιτίας αυτής της συμμετρίας η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητος της γωνίας θ. Επομένως η διατήρηση της στροφορμής είναι στενά συνδεδεμένη με τις συμμετρίες του συστήματος. Αν το σύστημα είναι συμμετρικό μόνο ως προς τον z-άξονα, τότε μόνο η l_z θα διατηρείται σταθερή. Στη περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων, κάθε συνιστώσα της στροφορμής στον 3D-χώρο $\vec{l}$ διατηρείται σταθερή. Σε διαφορετική περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι η δύναμη ακολουθεί μια **αξονική συμμετρία** (που σημαίνει ότι η χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τη γωνία περιστροφής φ γύρω από τον εν λόγω άξονα), τότε μόνο η συνιστώσα της στροφορμής $\vec{l}$ κατά μήκος του άξονα συμμετρίας διατηρείται σταθερή, ας πούμε p_φ.

Είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατόν να αναγνωριστούν όλες οι συμμετρίες του συστήματος από τη διαπίστωση και μόνο ότι η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη από κάποιες συντεταγμένες. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα των κεντρικών δυνάμεων, αν η χαμιλτονιανή έχει εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε

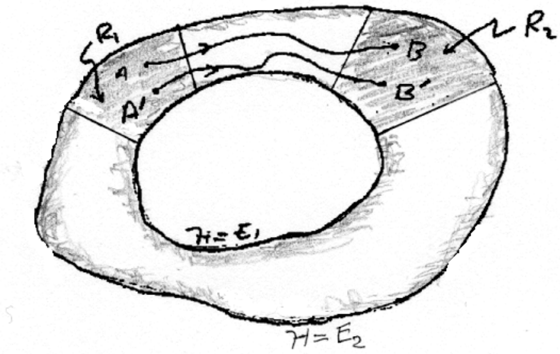
$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(x^2 + y^2)$$

που διαπιστώνουμε ότι καμμιά συντεταγμένη x ή y δεν είναι αγνοήσιμη, όμως παρόλα αυτά η χαμιλτονιανή είναι συμμετρική ως προς περιστροφές γύρω από τον άξονα z, που ορίζεται κάθετα στο επίπεδο (x,y).

13.3 Θεώρημα του Liouville

Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1,q_2,...,q_n$ και τις συζυγείς γενικευμένες ορμές $p_1,p_2,...,p_n$. Ο **φασικός χώρος** του συστήματος σχηματίζεται (spanned) από τις 2n συντεταγμένες ($q_1,q_2,...,q_n$, $p_1,p_2,...,p_n$). Κάθε σημείο στο φασικό χώρο με συντεταγμένες ($q_1,q_2,...,q_n$, $p_1,p_2,...,p_n$) αντιπροσωπεύει και μια πιθανή κατάσταση του συστήματος. Καθώς το σύστημα κινείται (ή εξελίσσεται χρονικά), το φασικό σημείο διαγράφει μια τροχιά στο φασικό χώρο, την **φασική τροχιά**. Η ταχύτητα του φασικού σημείου δίδεται από τις εξισώσεις Hamilton. Ακόμη οι φασικές τροχιές δεν "τέμνονται" μεταξύ τους, διότι από κάθε φασικό σημείο "περνάει" μία μόνο τροχιά η οποία είναι η μοναδική λύση των εξισώσεων Hamilton για δεδομένο αρχικό σημείο (δηλ. αρχικές συνθήκες).

Σχήμα 1 Ροή στο χώρο των φάσεων



Υποθέτουμε ότι έχουμε μια μεγάλη **συλλογή** (**ensemble**) συντηρητικών συστημάτων τα οποία περιγράφονται από την ίδια χαμιλτονιανή, Η. (Η έννοια του ensemble έχει δανειστεί από τη Στατιστική Μηχανική, όπου πραγματικά είναι μάταιο να προσπαθήσει κανείς να προσδιορίσει ην ακριβή κατάσταση ενός συστήματος με 10^{23} μόρια. Αντί αυτού, προσπαθεί να προσδιορίσει μέσες τιμές των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν, μελετώντας τη κίνηση ενός μεγάλου αριθμού πανομοιότυπων συστημάτων τα οποία αποτελούν το ensemble). Εφόσον τα συστήματα της συλλογής είναι συντηρητικά, η χαμιλτονιανή Η ισούται με την ολική ενέργεια Ε, και συνεπώς δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλ.

$$H(q_1,q_2,...,q_n, p_1,p_2,...,p_n) = E, \qquad (10)$$

όπου Ε είναι σταθερά. Η εξίσωση (10) ορίζει μια ισοενεργειακή επιφάνεια στο χώρο των φάσεων. Αν υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια μεγάλη συλλογή πανομοιότυπων συστημάτων, το καθένα εκ των οποίων έχει ενέργεια Ε μεταξύ των ορίων $E_1 \leq E \leq E_2$, τότε οι τροχιές όλων αυτών των συστημάτων καθώς κινούνται περιορίζονται μέσα στο torus το οποίο περικλείεται μεταξύ των δύο υπερεπιφανειών

$$H = E_1 \ \text{και} \ H = E_2,$$

όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 1. Εφόσον τα συστήματα έχουν διαφορετικές αρχικές συνθήκες (δηλ. διαφορετικά αρχικά φασικά σημεία Α, Α′,...,), θα κινούνται πάνω σε διαφορετικές φασικές τροχιές. Αν υποθέσουμε ότι τα αρχικά σημεία βρίσκονται μέσα στην περιοχή R_1, τα συστήματα αυτά μετά από χρόνο t θα βρίσκονται μέσα στη περιοχή R_2. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό σαν **θεώρημα Liouville**: *Οι όγκοι των περιοχών R_1 και R_2 είναι ίσοι, δηλ. ο όγκος στο χώρο των φάσεων διατηρείται σταθερός.*

Ακολουθεί η απόδειξη του θεωρήματος: Έστω V ο όγκος του ensemble στο χώρο των φάσεων. Ο ρυθμός μεταβολής του V είναι,

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \cdots \int \vec{\nabla} \cdot \vec{\upsilon}\, dV \qquad (11)$$

όπου $\vec{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα του "ρευστού" στο φασικό χώρο, $dV=(dq_1...,dq_n dp_1...,dp_n)$ είναι ο στοιχειώδης όγκος στο φασικό χώρο και το πολλαπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στον όγκο V του "ρευστού". Η απόκλιση της ταχύτητος είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \qquad (12)$$

επομένως η (11) γράφεται,

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) dq_1...dq_n dp_1...dp_n \qquad (13)$$

Αντικαθιστούμε τις γενικευμένες ταχύτητες από τις εξισώσεις Hamilton (6)-(7) στην (13) παίρνομε,

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) dq_1...dq_n dp_1...dp_n$$

Η παρένθεση μέσα στο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν, άρα ο όγκος του ensemble στο χώρο των φάσεων είναι σταθερός.

13.4 Παραγωγή των εξισώσεων Hamilton από μια αρχή των μεταβολών

Όπως οι εξισώσεις Lagrange, έτσι και οι εξισώσεις Hamilton μπορούν να εξαχθούν από μια αρχή των μεταβολών, όπως την αρχή του Hamilton. Συγκεκριμένα, απαιτείται όπως το ολοκλήρωμα δράσης [εξίσωση (3-50)] να είναι ακρότατο ως προς την επιλογή του δρόμου κίνησης του συστήματος, που συνοψίζεται στην απαίτηση όπως η μεταβολή του ολοκληρώματος να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\delta J = \delta \int_{t_o}^{t_1} L dt = 0$$

Εκφράζοντας την L συναρτήσει της H από την (5), η προηγούμενη εξίσωση γράφεται,

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \qquad (14)$$

Στον n-διάστατο χώρο των συντεταγμένων (configuration space), τα σημεία $(1)\equiv(q_1(t_1),q_2(t_1),...,q_n((t_1))$ και $(2)\equiv(q_1(t_2),q_2(t_2),...,q_n((t_2))$ παριστούν την αρχική και την τελική θέση του συστήματος. Όπως και σε προγενέστερη συζήτηση, αντιστοιχούμε σε κάθε πιθανό δρόμο από το σημείο (1)→(2) τη τιμή κάποιας παραμέτρου α, τέτοιας ώστε ο κατάλληλος δρόμος που δίδει ακρότατο στο ολοκλήρωμα J να ορίζεται, ας πούμε για α=0. Οπότε το ολοκλήρωμα J μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του α και η δ-μεταβολή ορίζεται από τη σχέση,

$$\delta J = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \,. \qquad (15)$$

Εφόσον τα ακραία σημεία (1) και (2) δεν μεταβάλλονται και συνεπώς δεν είναι συναρτήσεις του α, η παραγώγιση της (15) μπορεί να γίνει μέσα στο ολοκλήρωμα, δίδοντας

$$d\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\right) dt = 0 \quad (16)$$

Η σειρά των παραγώγων ως προς α και t μπορεί να εναλλαχθεί, οπότε η επί μέρους ολοκλήρωση του δεύτερου όρου στη (16) δίδει,

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt = p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} dt \,.$$

Η ποσότης $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ μηδενίζεται στα ακραία σημεία, και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha$ και $\delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} d\alpha$, η (16) γράφεται

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ dp_i (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) - dq_i (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}) \right\} dt = 0 . \qquad (17)$$

Καθώς οι μεταβολές δp_i και δq_i είναι ανεξάρτητοι, το ολοκλήρωμα μηδενίζεται μόνο αν οι συντελεστές τους στην (17) μηδενίζονται, οδηγούμαστε έτσι στις συνθήκες

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

που είναι φυσικά οι κανονικές εξισώσεις Hamilton.

13.5 Κανονικοί μετασχηματισμοί

Η επιλογή των γενικευμένων συντεταγμένων $(q_1,q_2,...,q_n)$ δεν υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς, αλλά ούτε και η μορφή των εξισώσεων Lagrange εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή. Με άλλα λόγια, οι εξισώσεις Lagrange μπορεί να είναι αμετάβλητες ως προς ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων $(q_1,q_2,...,q_n) \to (Q_1,Q_2,...,Q_n)$. Οι νέες συντεταγμένες είναι συναρτήσεις των q_i και ίσως και του χρόνου t, δηλ.,

$$Q_i = Q_i(q_1,q_2,...,q_n,t). \qquad (18)$$

Εφόσον οι εξισώσεις Lagrange παραμένουν αναλλοίωτοι στον μετασχηματισμό (18), θα πρέπει παρομοίως και οι εξισώσεις Hamilton να παραμένουν αναλλοίωτοι στον ίδιο μετασχηματισμό, και αντίστροφα, αν και το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές, διότι η χαμιλτονιανή περιλαμβάνει ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες και τις ορμές $(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n)$. Οπότε ο μετασχηματισμός θα πρέπει να περιλαμβάνει τις 2n μεταβλητές,

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i\,(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n,t) \\ P_i &= P_i\,(q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2...,p_n,t). \qquad (19) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε ως όρο ο μετασχηματισμός (19) να ικανοποιεί τις εξισώσεις Hamilton,

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}, \; k=1,...,n, \qquad (20)$$

υποθέτοντας ότι υπάρχει μια συνάρτηση H' των $(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)$, τότε ο μετασχηματισμός (19) καλείται **κανονικός μετασχηματισμός**. Η συνάρτηση H' παίζει τον ρόλο της χαμιλτονιανής στο νέο σύστημα συντεταγμένων $(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)$. Μπορεί να αποδειχθεί η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση: Ο μετασχηματισμός (19) είναι κανονικός, αν η ποσότης

$$\sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i \qquad (21)$$

είναι ολικό διαφορικό.

Είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο πως μπορούν οι εξισώσεις Hamilton να εξαχθούν από την αρχή του Hamilton, και οδηγηθήκαμε στη μηδενική μεταβολή του J, εξίσωση (14),

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p,t \right) dt = 0 .$$

Εάν απαιτήσουμε όπως και οι νέες συντεταγμένες $(Q_1,...,Q_n,P_1,...,P_n)$ ικανοποιούν την ίδια αρχή, τότε,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - H'(Q,P,t) \right) dt = 0 . \qquad (22)$$

Οι εξισώσεις (14) και (22) είναι ισοδύναμοι μόνο αν οι ολοκληρώσιμες ποσότητες διαφέρουν κατά το ολικό διαφορικό ως προς το χρόνο t κάποιας συνάρτησης F, δηλ.

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i - (H - H') \qquad (23)$$

Αν F=F(q,Q,t), τότε

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

οπότε λαμβάνουμε συγκρίνοντας με την (23),

$$p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}, \qquad (24\alpha)$$

$$P_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}, \ k=1,...,n \qquad (24\beta)$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (24\gamma)$$

Η συνάρτηση F καλείται **γεννήτρια συνάρτηση** του μετασχηματισμού. Αν είναι γνωστή η συνάρτηση F, τότε ο μετασχηματισμός (19) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις (24).

Αν βρούμε ένα κανονικό μετασχηματισμό ο οποίος να δίδει H′=0, τότε βλέπουμε από τις εξισώσεις κίνησης (20) ότι,

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} = 0,$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = 0,$$

δηλ. οι μεταβλητές Q_k και P_k είναι αγνοήσιμες, άρα μπορούμε να βρούμε τις αρχικές συντεταγμένες q_k και p_k και συνεπώς να προσδιορίζουμε τη κίνηση του συστήματος. Αρκεί να ξέρουμε την κατάλληλη γεννήτρια συνάρτηση F. Αν υποθέσουμε ότι F=F(q,P,t), μπορούμε να βρούμε την κατάλληλη γεννήτρια συνάρτηση F θέτοντας H′=0 στην (24γ), οπότε η F θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0 \qquad (25)$$

όπου $p_i = \partial F/\partial q_i$. Η εξίσωση (25) καλείται **εξίσωση Hamilton-Jacobi**, η οποία περιέχει τις n+1 ανεξάρτητες μεταβλητές $q_1, q_2, ..., q_n, t$. Δεν θα ασχοληθούμε με την επίλυση της (25).

13.6 Οι εξισώσεις κίνησης σε μορφή των αγκύλων Poisson

Η αγκύλη Poisson ορίζεται ως ακολούθως: Αν u και υ είναι δύο αυθαίρετες συναρτήσεις των q, p, τότε η **αγκύλη Poisson** των u και υ ως προς τις μεταβλητές q, p ορίζεται:

$$[u, \upsilon]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial \upsilon}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial \upsilon}{\partial q_i} \right). \qquad (26)$$

Είναι προφανής η αντισυμμετρική ιδιότης των αγκύλων Poisson $[u,\upsilon]=-[\upsilon,u]$.

<u>**Πρόταση:**</u> Αν οι συντεταγμένες $(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)$ είναι κανονικές συντεταγμένες, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij}, \qquad [q_i, q_j] = 0, \qquad [p_i, p_j] = 0, \qquad (27)$$

όπου [,] είναι οι αγκύλες Poisson (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση).

Θεωρώντας ότι τα q_i και p_i είναι συναρτήσεις των νέων μεταβλητών Q_k, P_k, η (26) μπορεί να γραφεί (θα παραλείπουμε του δείκτες q,p από την αγκύλη του Poisson),

$$[u, \upsilon] = \sum_{i,k} \left[\frac{\partial u}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial \upsilon}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \upsilon}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \right]$$

η οποία μετά από αναγωγές γράφεται,

$$[u, \upsilon] = \sum_k \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial Q_k}[u, Q_k] + \frac{\partial \upsilon}{\partial P_k}[u, P_k] \right) \qquad (28)$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε $Q_k \to u$, και $\upsilon \to u$, η (28) γράφεται,

$$[Q_k, u] = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}[Q_k, Q_j] + \frac{\partial u}{\partial P_j}[Q_k, P_j] \right)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τις ιδιότητες (27), παίρνομε

$$[Q_k, u] = \sum_j \frac{\partial u}{\partial P_j}\delta_{kj},$$

ή

$$[u,Q_k]=-\frac{\partial u}{\partial P_\kappa} \qquad (29\alpha)$$

Με καθόμοιο τρόπο, καταλήγουμε στη σχέση

$$[P_k,u]=\sum_j\left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}[P_k,Q_j]+\frac{\partial u}{\partial P_j}[P_k,P_j]\right)$$

η οποία δίδει,

$$[u,P_k]=\frac{\partial u}{\partial Q_\kappa} \qquad (29\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις (29) στην (28) παίρνουμε

$$[u,\upsilon]_{q,p}=\sum_k\left(-\frac{\partial \upsilon}{\partial Q_k}\frac{\partial u}{\partial P_\kappa}+\frac{\partial \upsilon}{\partial P_k}\frac{\partial u}{\partial Q_\kappa}\right)=[u,\upsilon]_{Q,P} \qquad (30)$$

δηλ. οι αγκύλες Poisson είναι αναλλοίωτες και ως προς τα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Αν ως συνάρτηση u επιλεγεί η χαμιλτονιανή H, τότε οι (29) γράφονται,

$$[q_k,H]=\frac{\partial H}{\partial p_\kappa}=\dot{q}_k, \quad [p_k,H]=-\frac{\partial H}{\partial q_\kappa}=\dot{p}_k$$

που είναι οι γνωστές μας κανονικές εξισώσεις Hamilton. Έστω ότι η συνάρτηση u=u(q,p,t). Τότε η ολική της παράγωγος ως προς το t είναι,

$$\frac{du}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\frac{\partial u}{\partial t}$$

και εκφράζοντας τις $\dot{q}_i,\dot{p}_i$ συναρτήσει της χαμιλτονιανής, παίρνομε,

$$\frac{du}{dt}=[u,H]+\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (31)$$

Η (31) παριστάνει την χρονική εξέλιξη (ή την εξίσωση κίνησης) της συνάρτησης u.

Παράδειγμα: Στο γνωστό μας πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή (μάζα m προσδεδεμένη στο ένα άκρο ελατηρίου, σταθεράς k), εφαρμόζουμε ένα κανονικό μετασχηματισμό, του οποίου η γεννήτρια συνάρτηση δίδεται από τη σχέση,

$$F=\tfrac{1}{2}m\omega q^2\cot Q, \qquad (\alpha)$$

όπου ω^2=k/m. Οι εξισώσεις (24α,β) γράφονται για την γεννήτρια συνάρτηση (α),

$$p=\frac{\partial F}{\partial q}=m\omega q\cot Q, \qquad (\beta 1)$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \tfrac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}\,. \quad (\beta 2)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να λυθούν ως προς Q και P συναρτήσει των q και p, όμως για λόγους κομψότητος θα προτιμήσουμε το αντίστροφο, δηλ. να πάρουμε τις παλιές μεταβλητές ως προς τις νέες,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \qquad (\gamma 1)$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (\gamma 2)$$

Εφόσον ο χρόνος δεν περιλαμβάνεται ρητά στην F, τότε λόγω της (24γ), η χαμιλτονιανή δεν αλλάζει από τον μετασχηματισμό. Αν $V = \tfrac{1}{2} kq^2$ είναι η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή, η χαμιλτονιανή παίρνει τη μορφή,

$$H = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2} kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} kq^2\,.$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές Q και P μέσω των εξισώσεων μετασχηματισμού (β) παίρνομε,

$$H = \omega P \cos^2 Q + k \frac{P}{m\omega} \sin^2 Q = \omega P\,. \qquad (\delta)$$

Επομένως, η χαμιλτονιανή είναι κυκλική ως προς Q, άρα η συζυγής της ορμή είναι σταθερά. Πράγματι η εξίσωση Hamilton

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0\,,$$

δίδει P=σταθερά. Ακόμη βλέπουμε από την (δ) ότι όντως P=E/ω, όπου E είναι η ενέργεια (σταθερά). Η εξίσωση Hamilton για τη συντεταγμένη Q:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega\,,$$

απ' όπου έπεται: Q=ωt+α, όπου α σταθερά ολοκλήρωσης. Αντικαθιστώντας τώρα πίσω στις εξισώσεις μετασχηματισμού (β) παίρνουμε τη λύση

$$q = \sqrt{\frac{E}{\tfrac{1}{2} m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

η οποία παριστάνει την τυπική λύση για τον αρμονικό ταλαντωτή. Βέβαια χρησιμοποιώντας κανονικούς μετασχηματισμούς για να λύσει κανείς το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή είναι "σαν να σπάει κανείς καρύδια με τη βαριά"! Όμως βλέπομε εδώ ένα παράδειγμα πώς η χαμιλτονιανή μπορεί να τεθεί μέσω κανονικών μετασχηματισμών σε τέτοια μορφή όπου όλες τις συντεταγμένες να είναι αγνοήσιμες.

ΣΕΙΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 4:

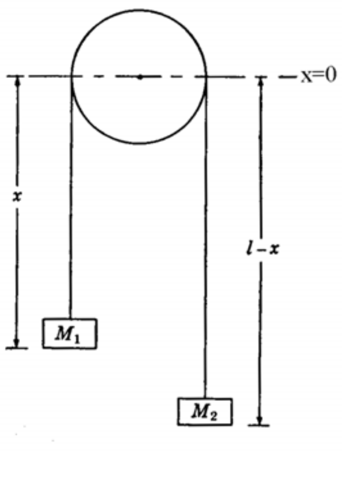
1. Στο παρακάτω Σχήμα 2 απεικονίζεται μια αβαρής τροχαλία. Στα δύο άκρα του (επίσης αβαρούς) νήματος της τροχαλίας έχουν εξαρτηθεί δύο μάζες M_1 και M_2, αντίστοιχα. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων. Γράψετε την συνάρτηση Hamilton και τις εξισώσεις κίνησης των σωμάτων. (Αξίζει να σημειωθεί ότι παρόλο που στο σύστημα έχομε 4 σώματα, δηλ. τις δύο μάζες, το νήμα, και τη τροχαλία, εν τούτοις απαιτείται μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (η x του σχήματος), για προσδιοριστεί πλήρως η κατάσταση του συστήματος. Τούτο ερμηνεύεται ως εξής: κατά πρώτον τα δύο τελευταία σώματα ως "αβαρή" αποκλείονται περαιτέρω συζήτησης, όμως οι 2 μάζες έπρεπε να χαρακτηρίζονται από τις συντεταγμένες τους x_1 και x_2, αντίστοιχα. Επειδή όμως υπάρχει ένας **σύνδεσμος** (constraint) μεταξύ τους, δηλ. το νήμα της τροχαλίας που τα συνδέει, ο οποίος εκφράζεται από τη μαθηματική σχέση: $x_1 + x_2 = l$, ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών μειώνεται από δύο σε ένα).

2. (Πρόβλημα 13-3 του Kibble, τροποποιημένο). Στο Σχήμα 3 απεικονίζεται μια αβαρής τροχαλία. Στο ένα άκρο του (επίσης αβαρούς) νήματος της τροχαλίας έχει εξαρτηθεί μάζα 2m, ενώ στο άλλο μάζα m, στην οποία έχει προσδεθεί το ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί μια τρίτη μάζα m. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων. Γράψετε την συνάρτηση Hamilton χρησιμοποιώντας ως γενικευμένες συντεταγμένες τις x_1 και x_2. Αν το σύστημα ξεκινήσει από την ηρεμία και με ατέντωτο ελατήριο, βρείτε τις θέσεις των σωμάτων συναρτήσει του t.

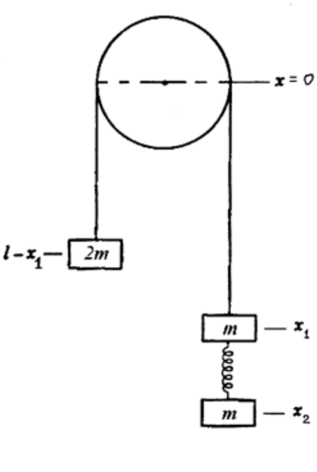
3. Βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες οι εξισώσεις

$$Q = q^{\alpha} \cos \beta p, \qquad P = q^{\alpha} \sin \beta p,$$

παριστούν κανονικό μετασχηματισμό. Ποιά είναι η μορφή της γεννήτριας συνάρτησης F(p,Q,t) στη περίπτωση αυτή;



Σχήμα 2



Σχήμα 3