ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

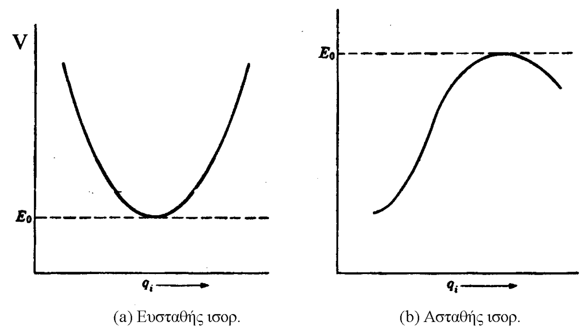
12.1 Ευστάθεια κοντά στη θέση ισορροπίας

Θεωρούμε ένα συντηρητικό σύστημα με n-βαθμούς ελευθερίας, το οποίο περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots q_n$. Αν το σύστημα βρίσκεται σε μια **θέση ισορροπίας**, τότε οι γενικευμένες δυνάμεις (στη θέση αυτή) ισούται με μηδέν,

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \; i=1,\ldots,n \qquad (1)$$

Από την (1) μπορούμε να υπολογίζουμε τις συντεταγμένες στη θέση ισορροπίας $(q_{01}, q_{02}, \ldots q_{0n})$, όπου η δυναμική ενέργεια έχει ακρότατο. Μια θέση ισορροπίας καλείται **ευσταθής** ή **ασταθής**, ανάλογα αν εφαρμοζόμενη μια μικρή διαταραχή του συστήματος στη θέση ισορροπίας του προκαλεί απλά μια περιορισμένη κίνηση του συστήματος γύρω από την θέση ισορροπίας του ή την οριστική απομάκρυνσή του από αυτήν. Στο Σχήμα 1 αποτυπώνεται η δυναμική ενέργεια στις δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

Σχήμα 1 Η δυναμική ενέργεια



Επειδή ενδιαφερόμαστε για την κίνηση του συστήματος στη γειτονιά μιας ευσταθούς θέσης ισορροπίας, αναπτύσσουμε κατά Taylor τη δυναμική ενέργεια για μικρές μετατοπίσεις η_i από τη θέση ισορροπίας,

$$V(q_1,\ldots,q_n) = V(q_{01},\ldots,q_{0n}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_o \eta_i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_o \eta_i \eta_j + \ldots \qquad (2)$$

όπου $q_i = q_{0i} + \eta_i$. Αν μετατοπίσουμε την στάθμη αναφοράς ώστε $V(q_{01},\ldots,q_{0n})=0$ και επειδή ο γραμμικός όρος στην (2) ισούται με μηδέν λόγω της (1), η δυναμική ενέργεια σε πρώτη προσέγγιση ισούται με

$$V(q_1,\ldots,q_n) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} \eta_i \eta_j \qquad (3)$$

όπου $V_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_o$. Είναι προφανές ότι οι σταθερές V_{ij} είναι συμμετρικές, δηλ. $V_{ji}=V_{ij}$.

Παρόμοια ανάπτυξη σε σειρά μπορούμε να πάρουμε και για την κινητική ενέργεια,

$$T(q_1,...,q_n)=\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j\ . \qquad (4)$$

Όπως και στη περίπτωση της δυναμικής ενέργειας, τα στοιχεία T_{jk} είναι συμμετρικά ως προς τους δείκτες τους, δηλ. $T_{jk}=T_{kj}$.

Απόδειξη της (4). Αν κανείς δεν επιθυμεί να δει τα ακριβή βήματα της απόδειξης, μπορεί να προχωρήσει στο επόμενο κομμάτι, χωρίς να χάσει τη συνέχεια του φορμαλισμού που αναπτύσσουμε. Πράγματι, η κινητική ενέργεια είναι,

$$T=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i\upsilon_i^2\ ,$$

όπου $\vec{\upsilon}_i=\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$ και τα διανύσματα θέσης είναι συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων, $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,...,q_n,t)$. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_i$ δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο t, οπότε η ταχύτης ισούται με: $\vec{\upsilon}_i=\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{n}(\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial t})$ και επειδή $\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0$, η ταχύτητα γράφεται τελικά, $\vec{\upsilon}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$ οπότε η κινητική ενέργεια παίρνει τη μορφή,

$$T=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i\ (\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{\eta}_j)^2 \qquad (5)$$

Αναπτύσσουμε το τετράγωνο της εσωτερικής παρένθεσης:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2&=\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{\eta}_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+....\right)^2\\&=\left((\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1})^2\dot{q}_1^2+(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2})^2\dot{q}_2^2+...\right)+2\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_3}\dot{q}_2\dot{q}_3+...\right)\\&=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k\end{aligned}$$

Συνεπώς, η κινητική ενέργεια (5) γράφεται,

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}(\sum_i m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k})\,\dot{q}_j\dot{q}_k=\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k=\tfrac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}m_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k \qquad (6)$$

όπου $m_{kl}=\sum\limits_i m_i\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$. Οι συντελεστές m_{jk} είναι γενικώς συναρτήσεις των q_i και μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Taylor ως προς τη θέση ισορροπίας, ως ακολούθως,

$$m_{jk}(q_1,...,q_n)=m_{jk}(q_{01},...,q_{0n})+\sum_{l=1}^{n}(\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l})_o\,\eta_l+... \qquad (7)$$

Εφόσον όμως η ανάπτυξη (6) είναι ήδη τετραγωνική ως προς τα $\dot{\eta}_i$, στη χαμηλότερη προσέγγιση της T κρατάμε μόνο το πρώτο όρο της ανάπτυξης (7), οπότε φθάνουμε στη ανάπτυξη (4),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} T_{jk}\, \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k$$

όπου οι σταθερές $T_{jk}=m_{jk}(q_{01},\ldots,q_{0n})$.

Από τις (3) και (4), η Langrangian δίδεται από τη σχέση,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (T_{ij}\dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij}\eta_i \eta_j) = 0\,. \qquad (8)$$

Λαμβάνοντας ως γενικευμένες μεταβλητές τις αποκλίσεις η_i από την ηρεμία, η Lagrangian (8) οδηγεί στις εξισώσεις Lagrange,

$$\sum_j (T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j) = 0\,,\ \ i=1,\ldots,n. \qquad (9)$$

Η επίλυση του συστήματος των n-διαφορικών εξισώσεων (9) θα δώσει την κίνηση του συστήματος κοντά στη θέση ισορροπίας ($q_{01},q_{02},\ldots q_{0n}$).

12.2 Επίλυση των εξισώσεων κίνησης

Οι διαφορικές εξισώσεις (9) είναι γραμμικές με σταθερούς συντελεστές. Δοκιμάζουμε επομένως λύσεις ταλάντωσης της μορφής,

$$\eta_i = Ca_i\, e^{-i\omega t} \qquad (10)$$

όπου Ca_i είναι το πλάτος ταλάντωσης για την συντεταγμένη q_i και C ένας παράγοντας αναλογίας. Αντικαθιστώντας στην (9) λαμβάνουμε,

$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij})\, a_j = 0\,,\ \ i=1,\ldots,n \qquad (11)$$

Οι εξισώσεις (11) αποτελούν ένα σύστημα n-ομογενών εξισώσεων με αγνώστους τα πλάτη a_j και για να υπάρχει μη μηδενική λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται,

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 T_{11} & V_{12} - \omega^2 T_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{21} - \omega^2 T_{21} & V_{22} - \omega^2 T_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{31} - \omega^2 T_{31} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

απ' όπου λαμβάνομε τη **χαρακτηριστική εξίσωση** n-βαθμού ως προς ω^2, της οποίας οι ρίζες θα είναι οι συχνότητες ταλάντωσης των λύσεων (10). Σαν εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας, θα μελετήσουμε το παράδειγμα του διπλού εκκρεμούς παρακάτω.

Πριν κλείσουμε το εδάφιο αυτό, θα δούμε το πρόβλημα που αναπτύξαμε από μια διαφορετική σκοπιά. Η εξίσωση (11) μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Πράγματι, αν γράφουμε τα στοιχεία T_{ij} σαν ένα πίνακα **T** και παρομοίως τα στοιχεία V_{ij} σαν τον πίνακα **V**, η (11) γράφεται,

$$\mathbf{V}\,\vec{\mathbf{a}} = \lambda\,\mathbf{T}\,\vec{\mathbf{a}} \qquad (13)$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών τώρα ανάγεται στο να βρούμε τις ιδιοτιμές λ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{\mathbf{a}}_\lambda$. Θα πρέπει να σημειώσουμε τις εξής ιδιότητες:

(1) οι ιδιοτιμές $\lambda \in \Re$,

(2) ιδιοδιανύσματα $\vec{\mathbf{a}}_{\lambda_1}, \vec{\mathbf{a}}_{\lambda_2}$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι κάθετα μεταξύ τους,

(2) οι πίνακες **V** και **T** είναι αυτοσυζυγείς ή ερμητιανοί.

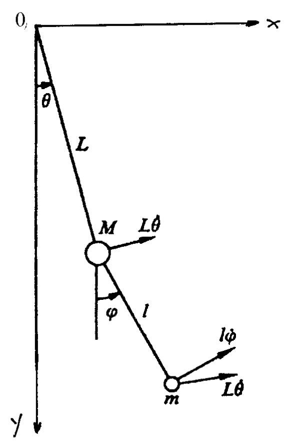
Οι προτάσεις αυτές αφήνονται σαν άσκηση, όπως και η απόδειξη της συνθήκης "ορθογωνιότητος",

$$\sum_{ij} T_{ij}\, a_{ik}\, a_{jl} = \delta_{kl} \qquad (14)$$

όπου a_{ik} αναφέρεται στην i-στή συνιστώσα του διανύσματος $\vec{\mathbf{a}}_k$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_k, δηλ. $\vec{\mathbf{a}}_k = (a_{1k}, a_{2k},\ldots,a_{nk})$.

Παράδειγμα: Το διπλό εκκρεμές αποτελείται από ένα μαθηματικό εκκρεμές μάζας M και μήκους L, και από ένα δεύτερο μαθηματικό εκκρεμές μάζας m και μήκους *l*, το οποίο εξαρτάται από το πρώτο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

Σχήμα 2 Το διπλό εκκρεμές



Θεωρούμε ότι η κίνηση είναι σ' ένα επίπεδο, οπότε το σύστημα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Οι γωνίες θ και φ λαμβάνονται ως προς την κατακόρυφο (οι οποίες όπως θα δούμε παρακάτω θα είναι και οι γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος). Επιλέγω το σημείο εξάρτησης του πρώτου εκκρεμούς σαν αρχή των αξόνων 0, και τους άξονες x,y όπως φαίνεται στο σχήμα. Τότε οι καρτεσιανές συντεταγμένες των δύο μαζών (όπως και οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας) είναι,

<u>μάζα M:</u>

$$x_1 = L\sin\theta \qquad \dot{x}_1 = L\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y_1 = L\cos\theta \qquad \dot{y}_1 = -L\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad (15a)$$

<u>μάζα m:</u>

$$x_2 = L\sin\theta + l\sin\varphi \qquad \dot{x}_2 = L\cos\theta\,\dot{\theta} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$y_2 = L\cos\theta + l\cos\varphi \qquad \dot{y}_2 = -L\sin\theta\,\dot{\theta} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad (15b)$$

Η κινητική ενέργεια των δύο μαζών, χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, είναι,

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \tfrac{1}{2}M(L^2\dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2}m[L^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\,L\,l\cos(\theta-\varphi)\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}] \\ &= \tfrac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + m\,L\,l\cos(\theta-\varphi)\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Για μικρές γωνίες θ,φ<<1 (σε rads) έχουμε: $\cos(\theta-\varphi) = 1 - \tfrac{1}{2}(\theta-\varphi)^2 + ... \cong 1$, οπότε η κινητική ενέργεια γράφεται,

$$T = \tfrac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + m\,L\,l\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \qquad (16)$$

Για τη δυναμική ενέργεια (λόγω βαρύτητος) θεωρώ το επίπεδο y=0 σαν στάθμη αναφοράς (θα επανέλθουμε στο θέμα της στάθμης αναφοράς της δυναμικής ενέργειας παρακάτω), οπότε η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών θα είναι

$$\begin{aligned} V &= -Mgy_1 - mg(y_1 + y_2) \\ &= -MgL\cos\theta - mg(L\cos\theta + l\cos\varphi) \\ &= -(M+m)gL\cos\theta - mg\,l\cos\varphi \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για θ=φ=0 (δηλ. στη θέση ισορροπίας των μαζών), η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών είναι: V(0)= –(M+m)gL–mg*l*. Για μικρές γωνίες θ,φ<<1 (σε rads) έχουμε: $\cos\theta \cong 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2$ και $\cos\varphi \cong 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2$, οπότε η δυναμική ενέργεια γράφεται,

$$V = V(0) + \tfrac{1}{2}(M+m)gL\theta^2 + \tfrac{1}{2}mgl\varphi^2 \qquad (17)$$

Επειδή στην εισαγωγή του κεφαλαίου και μάλιστα στη παραγωγή της (3), είχαμε μετατοπίσει τη στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας ώστε ο σταθερός όρος V(0) στην ανάπτυξη Taylor (3) να μηδενίζεται, θα κάνουμε το ίδιο και εδώ. Μετατοπίζουμε λοιπόν κατά V(0) την στάθμη αναφοράς της δυναμικής ενέργειας, δηλ. $V(\theta,\varphi)\to V'(\theta,\varphi)=V(\theta,\varphi)-V(0)$, οπότε στην (17) απλά δεν θα περιλαμβάνεται ο όρος V(0). Η μετατόπιση αυτή οδηγεί στην εξής έκφραση της δυναμικής ενέργειας:

$$V' = V - V(0) = (M+m)gL(1-\cos\theta) + mg\,l\,(1-\cos\varphi)$$

που πράγματι στη θέση ισορροπίας του συστήματος ($\theta=\varphi=0$), η δυναμική ενέργεια ισούται τώρα με μηδέν. Άρα εφεξής, αγνοούμε τον όρο V(0), χωρίς βέβαια στην ουσία να αλλάζει τίποτα στο φορμαλισμό που αναπτύσσουμε εδώ, απλώς γίνονται λίγο πιο απλοί οι υπολογισμοί, και αγνοούμε τον τόνο (′) από τη δυναμική ενέργεια. Τότε η Langrangian (που δεν θα χρησιμοποιηθεί στη μέθοδο που αναπτύξαμε), βάσει των (16) και (17), είναι

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}(M+m)L^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m l^2\dot{\varphi}^2 + m\,L\,l\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} - \tfrac{1}{2}(M+m)gL\theta^2 - \tfrac{1}{2}mgl\varphi^2 \qquad (18)$$

Όπως είναι φυσικό από την (18), οι γωνίες θ και φ είναι η ενδεικνυόμενη επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων του προβλήματος, δηλ. $\eta_1=\theta$, και $\eta_2=\varphi$. Υπολογίζουμε τα στοιχεία μήτρας T_{ij} και V_{ij}, χρησιμοποιώντας τις (16) και (17),

$$T_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2} = (M+m)L^2, \qquad T_{21} = T_{12} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = mL\,l, \qquad T_{22} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2^2} = m\,l^2$$

$$V_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} = (M+m)gL, \qquad V_{21} = V_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, \qquad V_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} = mg\,l$$

οπότε η ορίζουσα (12) γράφεται,

$$\begin{vmatrix} (M+m)gL - \omega^2(M+m)L^2 & -\omega^2 mLl \\ -\omega^2 mLl & mgl - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

απ' όπου προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση. Όμως για να απλουστεύσουμε τις πράξεις (χωρίς να αλλοιωθεί αισθητά η γενικότης), παίρνουμε m=M και $L=l$, οπότε η ορίζουσα (19) δίδει τη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$2mL(g-\omega^2 L)\cdot mL(g-\omega^2 L) - \omega^4 m^2 L^4 = 0$$

ή

$$2(g-\omega^2 L)^2 - \omega^4 L^2 = 0 \qquad (20)$$

της οποίας οι ρίζες είναι,

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_o^2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_o^2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad (21)$$

όπου $\omega_o^2 = g/L$. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα πλάτη ταλάντωσης που αντιστοιχούν σε καθεμιά συχνότητα ξεχωριστά. Πράγματι,

(i) για $\omega^2 = \omega_1^2$ το σύστημα (11) γράφεται,

$$2mL(g - \frac{g/L}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}L)\,a_{11} - \frac{g/L}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}mL^2 a_{21} = 0$$

απ' όπου έπεται,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (22)$$

(ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη συνιστώσα του πλάτους και ο δεύτερος στην ιδιοτιμή).

(ii) για $\omega^2 = \omega_2^2$ το σύστημα (11) γράφεται,

$$2mL(g - \frac{g/L}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}L)\,a_{12} - \frac{g/L}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}mL^2 a_{22} = 0\,,$$

απ' όπου έπεται,

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \qquad (23)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη συνθήκη ορθογωνιότητος (14) για k=*l*=1 έχομε: $\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i1}\, a_{j1} = 1$, δηλ.

$T_{11}a_{11}a_{11} + T_{12}a_{11}a_{21} + T_{21}a_{21}a_{11} + T_{22}a_{21}a_{21} = 1$ ή $2mL^2a_{11}^2 + 2mL^2a_{11}a_{21} + mL^2a_{21}^2 = 1$, άρα,

$$2a_{11}^2 + 2a_{11}a_{21} + a_{21}^2 = \frac{1}{mL^2} \qquad (24)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (22) για $\omega^2 = \omega_1^2$, βρίσκουμε:

$$a_{21} = \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{2})mL^2}}, \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}a_{21}$$

Συνεπώς, το ιδιοδιάνυσμα του πλάτους που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_1 είναι:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{2})mL^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

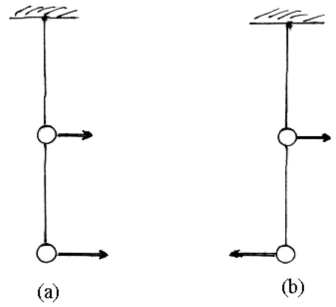
Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 3(a). Τα δύο εκκρεμή ταλαντούνται εν φάσει μέσα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο με την ίδια συχνότητα ω_1 (αναφερόμενοι για μικρές ταλαντώσεις γύρω από θέση ευσταθούς ισορροπίας), δηλ. και τα δύο εκκρεμή ταλαντούνται σαν ένα σώμα

Για την δεύτερη συχνότητα ταλάντωσης ω_2, εφαρμόζουμε ομοίως τη συνθήκη ορθογωνιότητος (14) για k=2, *l*=2: $\sum_{ij} T_{ij}\, a_{i2}\, a_{j2} = 1$,

δηλ. $T_{11}a_{12}a_{12} + T_{12}a_{12}a_{22} + T_{21}a_{22}a_{12} + T_{22}a_{22}a_{22} = 1$, ή $2mL^2a_{12}^2 + 2mL^2a_{12}a_{22} + mL^2a_{22}^2 = 1$, άρα

$$2a_{12}^2 + 2a_{12}a_{22} + a_{22}^2 = \frac{1}{mL^2} \qquad (26)$$

Σχήμα 3 Οι δύο τρόποι ταλάντωσης ενός διπλού εκκρεμούς το οποίο ταλαντούται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο με συχνότητα (a) $\omega = \omega_1$ και (b) $\omega = \omega_2$



Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (23) για $\omega^2 = \omega_2^2$, βρίσκουμε:

$$a_{22} = \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})mL^2}}, \qquad a_{12} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}a_{22}$$

Συνεπώς, το ιδιοδιάνυσμα του πλάτους που αντιστοιχεί στη συχνότητα ω_2 είναι:

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})mL^2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Αυτός ο τρόπος ταλάντωσης φαίνεται ενδεικτικά στο Σχήμα 3(b). Τα δύο εκκρεμή ταλαντούνται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο με διαφορά φάσης 180^o και με την ίδια συχνότητα ω_2 (αναφερόμαστε σε μικρές ταλαντώσεις γύρω από θέση ευσταθούς ισορροπίας).

12.3 Κανονικές μορφές ταλάντωσης

Η προηγούμενη συζήτηση έδειξε ότι οι εξισώσεις κίνησης ικανοποιούνται από μια λύση ταλάντωσης της μορφής (10) για ένα σύνολο n-ιδιοσυχνοτήτων $\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n$. Η γενική λύση λοιπόν των εξισώσεων κίνησης θα είναι η υπέρθεση ταλαντώσεων με όλες τις επιτρεπόμενες συχνότητες. Οι συχνότητες αυτές καλούνται και **συχνότητες συντονισμού** ή **συχνότητες ελεύθερης ταλάντωσης** του συστήματος. Επομένως, η γενική λύση μπορεί να γραφεί,

$$\eta_i = \sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t} \qquad (28)$$

όπου ο παράγοντας αναλογίας C_k ($\in C$) αναφέρεται στη συγκεκριμένη συχνότητα. Γενικά, σε κάθε ιδιοτιμή λ_k της χαρακτηριστικής εξίσωσης αντιστοιχούν δύο ισοσυχνότητες ω_k και $-\omega_k$, το ιδιοδιάνυσμα $\vec{\mathbf{a}}_k$ είναι το ίδιο και για τις δύο συχνότητες, όμως οι παράγοντες αναλογίας C_k^+ και C_k^- μπορεί να είναι διαφορετικοί, οπότε η γενική λύση θα έχει τη μορφή,

$$\eta_i = \sum_k a_{ik} (C_k^+ e^{i\omega_k t} + C_k^- e^{-i\omega_k t}) \,. \qquad (29)$$

Θα πρέπει βέβαια να θυμόμαστε ότι η πραγματική κίνηση είναι το πραγματικό μέρος της μιγαδικής λύσης, οπότε το πραγματικό μέρος των (28) ή (29) γράφεται

$$\eta_i = \sum_k f_k a_{ik} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \qquad (30)$$

όπου το πλάτος f_k και η φάση φ_k προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες (θέσαμε $C_k^{\pm} = f_k e^{\pm i\varphi_k t}$).

Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ το οποίον ορίζεται από τις εξισώσεις μετασχηματισμού των αρχικών συντεταγμένων $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$,

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_i \qquad (31)$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\zeta} \qquad (32)$$

όπου $\boldsymbol{\zeta}$ είναι ο μονόστηλος πίνακας με στοιχεία $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ και $\boldsymbol{\eta}$ ο μονόστηλος πίνακας με στοιχεία $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$. Ο ανάστροφος πίνακας $\boldsymbol{\eta}^T$ είναι πίνακας μιας γραμμής και μάλιστα ισχύει (ιδιότητες του ανάστροφου γινομένου πινάκων)

$$\boldsymbol{\eta}^T = \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{A}^T \,. \qquad (33)$$

Ο πίνακας **A** στη (32) σχηματίζεται από τα ιδιοδιανύσματα $\vec{\mathbf{a}}_k$, δηλ.

$$\mathbf{A} = (\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, ..., \vec{\mathbf{a}}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (34)$$

Ο πίνακας **A** αναφέρεται και σαν πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Ο πίνακας **A** έχει γνωστές ιδιότητες, η απόδειξη των οποίων αφήνεται σαν άσκηση, όπως η ιδιότητα διαγωνοποίησης των πινάκων **T** και **V**. Για παράδειγμα, η σχέση “ορθογωνιότητος” της κινητικής ενέργειας (14) μπορεί να τεθεί υπό μορφή πινάκων ως εξής,

$$\mathbf{A}^T\, \mathbf{T}\, \mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad (35)$$

όπου $\mathbf{A}^T$ είναι ο ανάστροφος πίνακας και **I** ο μοναδιαίος πίνακας. Ακόμη, ο πίνακας **A** διαγωνοποιεί τον πίνακα της δυναμικής ενέργειας **V** ως εξής,

$$\mathbf{A}^T\ \mathbf{V}\ \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \qquad (36)$$

όπου **λ** είναι διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (37)$$

(ο μετασχηματισμός $\mathbf{V} \to \mathbf{A}^T \mathbf{V}\ \mathbf{A}$ (36) είναι γνωστός ως **congruent transformation** του **V** από τον **A**).

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των νέων συντεταγμένων, χρησιμοποιώντας τη σχέση μετασχηματισμού (32). Πράγματι, η δυναμική ενέργεια (3) γράφεται κατ' αρχήν ως

$$V = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i V_{ij} \eta_j$$

ή υπό μορφή γινομένου πινάκων

$$V = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T\ \mathbf{V}\ \boldsymbol{\eta}$$

και εισάγοντας τον μετασχηματισμό (32) παίρνει απλούστερη μορφή,

$$V = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{A}^T)\mathbf{V}(\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{V}\mathbf{A})\boldsymbol{\zeta} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\zeta} = \tfrac{1}{2}\sum_k \omega_k^2 \zeta_k^2$$

όπου ενδιάμεσα έχομε χρησιμοποιήσει τον μετασχηματισμό της δυναμικής ενέργειας (36). Συνεπώς,

$$V = \tfrac{1}{2}\sum_k \omega_k^2 \zeta_k^2 \ . \qquad (38)$$

Παρομοίως, η κινητική ενέργεια (4) μπορεί να τεθεί υπό μορφή γινομένου πινάκων,

$$T = \tfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\ \mathbf{T}\ \dot{\boldsymbol{\eta}}$$

και εισάγοντας τον μετασχηματισμό (32) παίρνει απλούστερη μορφή,

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\zeta}}^T \mathbf{A}^T)\mathbf{T}(\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\zeta}}) = \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{T}\mathbf{A})\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \tfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^T\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \tfrac{1}{2}\sum_k \dot{\zeta}_k^2$$

όπου ενδιάμεσα έχομε χρησιμοποιήσει την ιδιότητα "ορθογωνιότητος" (35). Συνεπώς,

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_k \dot{\zeta}_k^2 \ . \qquad (39)$$

Οι σχέσεις (38) και (39) δηλώνουν ότι στο νέο σύστημα συντεταγμένων και η κινητική και η δυναμική ενέργεια εκφράζονται σαν άθροισμα τετραγώνων μόνο, χωρίς διασταυρούμενους όρους.

Οι εξισώσεις κίνησης αποκαλύπτουν αυτή την απλότητα των νέων συντεταγμένων. Πράγματι, η νέα Langrangian είναι,

$$L = \tfrac{1}{2}\sum_k (\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2) \qquad (40)$$

οπότε οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες ζ_k είναι

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0\,. \qquad (41)$$

Οι εξισώσεις (41) έχουν τις λύσεις,

$$\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t} \qquad (42)$$

Κάθε νέα συντεταγμένη ζ_k είναι περιοδική συνάρτηση η οποία περιλαμβάνει μια μόνο συχνότητα συντονισμού. Γι αυτό το λόγο οι συντεταγμένες ζ_k καλούνται **κανονικές συντεταγμένες** του συστήματος. Κάθε κανονική συντεταγμένη αντιστοιχεί σε μια ταλάντωση του συστήματος με μια μόνο συχνότητα και αυτές οι ξεχωριστές ταλαντώσεις αναφέρονται σαν **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** (normal modes of vibration). Όλα τα σώματα (του συστήματος) σε κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης ταλαντούνται εν φάσει και με την ίδια συχνότητα. Οπότε η πλήρης κίνηση του συστήματος θα είναι το άθροισμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ζυγισμένων με το κατάλληλο πλάτος και παράγοντα φάσης που εμπεριέχονται στο C_k.

Παράδειγμα. Διπλό εκκρεμές (συνέχεια).

Οι κανονικές συντεταγμένες του προβλήματος βάσει των σχέσεων ορισμού (31) ή (32) θα έχουν τη μορφή,

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \qquad (43)$$

όπου $\eta_1=\theta$ και $\eta_2=\varphi$, και οι συνιστώσες των πλατών a_{ij} δίδονται από τις (25) και (26). Οπότε η (43) γράφεται αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{2})mL^2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_1 - \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})mL^2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_2 \\ \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{2})mL^2}}\zeta_1 + \frac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{2})mL^2}}\zeta_2 \end{aligned} \qquad (44)$$

τις οποίες λύνουμε ως προς ζ_1 , ζ_2,

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= +\sqrt{(\sqrt{2}+1)mL^2}\ \ (\theta + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi) \\ \zeta_2 &= -\sqrt{(\sqrt{2}-1)mL^2}\ \ (\theta - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi) \end{aligned}\,. \qquad (45)$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τις (38) και (39), αντικαθιστώντας τις (44) στις (17) και (16). Πράγματι βρίσκουμε για τη κινητική ενέργεια, (17),

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\zeta}_1^2 + \tfrac{1}{2}\dot{\zeta}_2^2$$

και παρομοίως για τη δυναμική ενέργεια, (16),

$$V = \tfrac{1}{2}\omega_1^2\zeta_1^2 + \tfrac{1}{2}\omega_2^2\zeta_2^2$$

και τελικά η Langrangian γράφεται συναρτήσει των κανονικών συντεταγμένων ζ_1 , ζ_2,

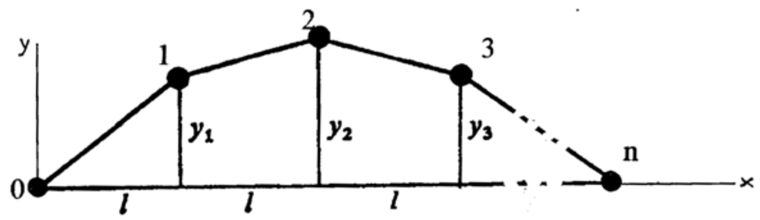
$$L = \tfrac{1}{2}(\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2) - \tfrac{1}{2}(\omega_1^2\zeta_1^2 + \omega_2^2\zeta_2^2)$$

δηλ. επαληθεύεται η έκφραση (40).

Παράδειγμα: Ταλαντώσεις σωματιδίων σε τεντωμένη χορδή.

Θεωρούμε χορδή, μήκους $(n+1)l$, η οποία τεντώνεται στα άκρα της από τάση F (εφαρμοζόμενη κατά μήκος της χορδής). Υποθέτουμε ότι κατά μήκος της χορδής έχουν τοποθετηθεί **n** ίσες μάζες m ανά ίσα διαστήματα l. Θεωρούμε κατ' αρχήν μόνο τις **εγκάρσιες μετατοπίσεις** των σωματιδίων τη χορδής, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Σχήμα 4 Στιγμιότυπο τεντωμένης χορδής σε εγκάρσια μετατόπιση.



Η κινητική ενέργεια των σωματιδίων της χορδής είναι

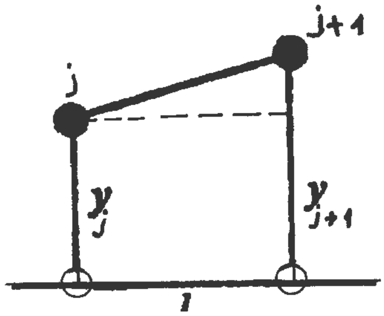
$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + ... + \dot{y}_n^2)\,. \qquad (46)$$

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια, θεωρούμε ότι το αρχικό μήκος της χορδής μεταξύ των σωματιδίων j και j+1 είναι l. Όταν μετατοπιστεί η χορδή από τη θέση ισορροπίας της, τα σωματίδια j και j+1 θα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $s = \sqrt{l^2 + (y_{j+1} - y_i)^2}$, όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 5. Η απόσταση αυτή γράφεται

$$s = \sqrt{l^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} = l\sqrt{1 + (\frac{y_{j+1} - y_j}{l})^2} = l\,[1 + \tfrac{1}{2}(\frac{y_{j+1} - y_j}{l})^2 + ...\} \cong l + \frac{(y_{j+1} - y_j)^2}{2l}$$

άρα η επιμήκυνση της χορδής μεταξύ των σωματιδίων j και j+1 είναι

$$\delta l \cong \frac{1}{2l}(y_{j+1} - y_j)^2$$



Σχήμα 5 Εγκάρσια μετατόπιση των γειτονικών σωματιδίων j και j+1

Το έργο που δαπανάται για την επιμήκυνση αυτή ισούται με

$$F\delta l \cong \frac{F}{2l}(y_{j+1} - y_j)^2$$

(το οποίο αποθηκεύεται στη χορδή σαν δυναμική ενέργεια). Οπότε, προσθέτοντας τις συνεισφορές όλων των τμημάτων της χορδής βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια της χορδής,

$$V = \frac{F}{2l}[(y_1 - y_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 + ... + (y_{n+1} - y_n)^2] \qquad (47)$$

όπου θεωρούμε $y_0 = y_{n+1} = 0$ (πακτωμένη χορδή κατά τα άκρα της).

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συνεχές όριο: $n \to \infty$ και $l \to 0$, η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων j και j+1 γράφεται $s = l\sqrt{1 + (\frac{y_{j+1} - y_j}{l})^2} \to \sqrt{1 + y'^2}\ dx$ και καταλήγουμε σε ανάλογη έκφραση της (47) στο συνεχές όριο, όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο]

Από τις (46) και (47) υπολογίζουμε τις εξισώσεις Langrange των σωματιδίων της χορδής,

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{F}{ml}(y_0 - 2y_1 + y_2) \\ \ddot{y}_2 &= \frac{F}{ml}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot{y}_n &= \frac{F}{ml}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \end{aligned} \qquad (48)$$

(όπου $y_0 = y_{n+1} = 0$). Για την επίλυση του συστήματος των ομογενών διαφορικών εξισώσεων (48), δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής,

$$y_i = A_i\, e^{-i\omega t} \qquad (49)$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα (48) παίρνουμε,

$$-\omega^2 A_1 = \frac{F}{ml}(A_0 - 2A_1 + A_2)$$

$$-\omega^2 A_2 = \frac{F}{ml}(A_1 - 2A_2 + A_3)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\omega^2 A_n = \frac{F}{ml}(A_{n-1} - 2A_n + A_{n+1})$$

(όπου A_0=A_{n+1}=0) . Ακόμη το σύστημα γράφεται,

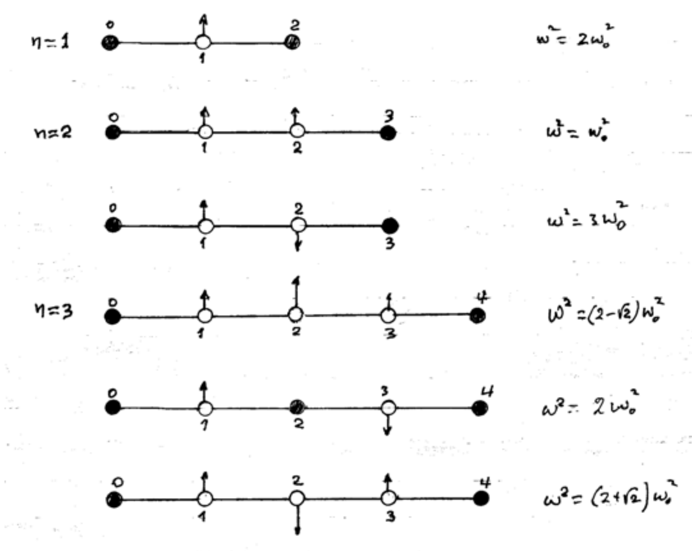
$$\begin{aligned}
&-0 + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0\\
&-\omega_o^2 A_1 + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_2 - \omega_o^2 A_3 = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-\omega_o^2 A_{n-2} + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_{n-1} - 2\omega_o^2 A_n = 0\\
&-\omega_o^2 A_{n-1} + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_n \quad - 0 = 0
\end{aligned} \tag{50}$$

όπου $\omega_o^2 = \frac{F}{ml}$. Υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες ω και τα πλάτη A_i, επαγωγικά.

Για n=1 (εφόσον A_0=A_2=0) βρίσκουμε: $(2\omega_o^2 - \omega^2) = 0$, άρα $\omega^2 = 2\omega_o^2$.

Για n=2, οι εξισώσεις (50) δίδουν τη χαρακτηριστική εξίσωση: $(2\omega_o^2 - \omega^2)^2 - \omega_o^4 = 0$, οπότε βρίσκω τις λύσεις: $\omega^2 = \omega_o^2$ και $\omega^2 = 3\omega_o^2$. Αντικαθιστώντας τη λύση $\omega^2 = \omega_o^2$ στις (50) παίρνω: A_1:A_2=1, ενώ η λύση $\omega^2 = 3\omega_o^2$ δίδει τα πλάτη: A_1:A_2= –1.

Σχήμα 6 Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης χορδής με n διάκριτα σωματίδια ίσων μαζών, για n=1,2,3
Οι μαύροι κύκλοι παριστάνουν σωματίδια που παραμένουν ακίνητα.



Για n=3, οι (50) οδηγούν στη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} (2\omega_o^2 - \omega^2) & -\omega_o^2 & 0 \\ -\omega_o^2 & (2\omega_o^2 - \omega^2) & -\omega_o^2 \\ 0 & -\omega_o^2 & (2\omega_o^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

και αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνομε την εξίσωση,

$$(2\omega_o^2-\omega^2)^3-2\omega_o^4(2\omega_o^2-\omega^2)=0$$

απ’ όπου βρίσκομε τις ρίζες της κυβικής εξίσωσης όπως και τα αντίστοιχα πλάτη,

$$\omega_1^2=(2-\sqrt{2})\omega_o^2, \qquad \text{πλάτη: } A_1{:}A_2{:}A_3=1{:}\sqrt{2}{:}1$$

$$\omega_2^2=2\omega_o^2, \qquad \text{πλάτη: } A_1{:}A_2{:}A_3=1{:}\,0\,{:}-1$$

$$\omega_3^2=(2+\sqrt{2})\omega_o^2, \qquad \text{πλάτη: } A_1{:}A_2{:}A_3=1{:}-\sqrt{2}{:}1,$$

και ούτω καθεξής μπορεί να συνεχιστεί ο υπολογισμός για n=4,5,… Στο Σχήμα 6 απεικονίζονται οι τρόποι ταλάντωσης της χορδής για n=1,2,3.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: ΣΕΙΡΑ 3

1. Θεωρήσατε ένα γραμμικό συμμετρικό τριατομικό μόριο με μάζες m, M, και m. Θεωρούμε μόνο τις διαμήκεις ταλαντώσεις του μορίου, δηλ. τα άτομα μπορούν να κινούνται μόνο κατά μήκος του άξονα του μορίου (τον οποίο να λάβετε σαν άξονα x). Το δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων μπορεί να προσεγγιστεί από ένα ελατήριο σταθεράς k. Στη θέση ισορροπίας τα άτομα απέχουν μεταξύ τους απόσταση *l* (τα ακραία άτομα δεν είναι πακτωμένα). Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες, τα ιδιοδιανύσματα, και τις κανονικές μορφές ταλάντωσης του μορίου. Δώσατε και μια φυσική εικόνα για κάθε κανονική μορφή ταλάντωσης του μορίου
2. Να διαγωνοποιηθεί ο τανυστής:

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 2 & -5\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$$

(Υπόδειξη: η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να παραγοντοποιηθεί)

3. Στο πρόβλημα των δύο συζευγμένων εκκρεμών, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια είναι, αντίστοιχα: $T=\frac{1}{2}(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2)$ και $V=\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2-2k\theta_1\theta_2)$, όπου k μια σταθερά. Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες, τα ιδιοδιανύσματα, και τις κανονικές μορφές ταλάντωσης του συζεγμένου συστήματος. Δώσατε και μια φυσική εικόνα για κάθε κανονική μορφή ταλάντωσης.