ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2004-2005

ΜΑΘΗΜΑ: ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Μιχ. Βελγάκης

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΝΕΥΤΩΝΙΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

1.1 Εισαγωγή

Η Κλασσική Μηχανική ασχολείται με τις βασικές έννοιες της Φυσικής, όπως χώρος, χρόνος, κίνηση, δύναμη, κλπ., οι οποίες είναι αναγκαίες για να περιγράψουμε την κινητική κατάσταση των υλικών σωμάτων. Υποθέτουμε στη παρακάτω περιγραφή μας ότι οι διαστάσεις των σωμάτων είναι αμελητέες ως προς τις μεταξύ τους αποστάσεις και ότι οι ταχύτητες τους είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός. Η Κλασσική Μηχανική περιγράφει φαινόμενα από τον καθημερινό μας κόσμο, τον **μακρόκοσμο** όπως αναφέρεται. Αντίθετα στον **μικρόκοσμο**, όπως αναφέρεται ο κόσμος της Ατομικής και της Πυρηνικής Φυσικής, η Κλασσική Μηχανική είναι ανεπαρκής και εκεί αντικαθίσταται από την Κβαντική Μηχανική. Επίσης, στο όριο των μεγάλων ταχυτήτων, η Κλασσική Μηχανική χρειάζεται τροποποιήσεις και πρέπει να αντικατασταθεί από τη Σχετικιστική Μηχανική.

Αναφορικά με τις βασικές έννοιες χώρος και χρόνος, στη Κλασσική Μηχανική υποθέτουμε ότι πρόκειται για συνεχείς ποσότητες, ότι η γεωμετρία του χώρου είναι Ευκλείδια, και ότι δεν υπάρχει όριο στην ακρίβεια με την οποία μπορούν να μετρηθούν τα μεγέθη αυτά, πράγμα που δεν αληθεύει στην Κβαντική Μηχανική.

Επίσης, στην Κλασσική Μηχανική υποθέτουμε ότι οι παρατηρητές σε διάφορα **αδρανειακά συστήματα** είναι **ισοδύναμοι**, δηλ. οι νόμοι της Φυσικής είναι **ταυτόσημο**ι στα συστήματα αυτά (ή λέμε ότι τα συστήματα αναφοράς είναι **ισοδύναμα**).

1.2 Νόμοι του Νεύτωνα

Θεωρούμε ένα σωματίδιο ή υλικό σημείο. Με αυτό εννοούμε ότι ένα σώμα έχει αμελητέες διαστάσεις ως προς την απόσταση που διανύει, ή την μεταξύ των σωματιδίων απόσταση. Η θέση του σωματιδίου $\vec{r}(t)$ περιγράφεται από τις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y,z, οι οποίες είναι συναρτήσεις του χρόνου t. Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο t ορίζουν την **ταχύτητα**, $\vec{\upsilon}(t)=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ και την **επιτάχυνση**, $\vec{a}(t)=\dfrac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}$.

Θεωρούμε ένα σύστημα από Ν σώματα (με την έννοια του σωματιδίου που ορίσαμε παραπάνω). Για να προσδιορίσουμε το σύστημα αυτό απαιτούνται 3Ν συντεταγμένες. Ο ελάχιστος αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών που απαιτούνται για να προσδιοριστούν πλήρως οι θέσεις των σωμάτων του συστήματος αναφέρεται ως αριθμός των **βαθμών ελευθερίας** του συστήματος, που εν προκειμένω είναι 3Ν. Οι ποσότητες αυτές δεν είναι απαραίτητο να είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σωματιδίων. Γενικώς, οι **n** ποσότητες $q_1,q_2,\ldots,q_n$ οι οποίες ορίζουν πλήρως τις θέσεις των σωματιδίων ενός συστήματος με **n** βαθμούς ελευθερίας καλούνται **γενικευμένες συντεταγμένες** και οι παράγωγοί τους $\dot{q}_i$ ως προς τον χρόνο t καλούνται **γενικευμένες ταχύτητες**. Οι n γενικευμένες συντεταγμένες $(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ αντιστοιχούν σε ένα συγκεκριμένο σημείο στον nδιάστατο υπερχώρο ο οποίος αναφέρεται σαν **χώρος των συντεταγμένων** (configuration space). Εάν οι τιμές $(q_i, \dot{q}_i)$ είναι καθορισμένες σε κάποια χρονική στιγμή t, (οπότε λέμε ότι η κατάσταση του συστήματος είναι καθορισμένη), τότε μπορεί να προσδιοριστεί η κατάσταση του συστήματος στη μετέπειτα χρονική στιγμή t+Δt, δηλ. η κίνηση (ή η χρονική εξέλιξη) του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί. Οι μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των επιταχύνσεων, ταχυτήτων και των συντεταγμένων που διέπουν την χρονική εξέλιξη του συστήματος καλούνται **εξισώσεις κίνησης** του συστήματος και συνήθως πρόκειται για ODE 2ας τάξεως των συναρτήσεων $\{q_i(t);\ i=1,n\}$ και η ολοκλήρωση τους καθιστά δυνατό τον προσδιορισμό της τροχιάς του συστήματος.

Αν $\vec{F}_i$ είναι η ολική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα-i, η εξίσωση κίνησης του σώματος αυτού είναι απλά ο 2ος νόμος του Νεύτωνα,

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \qquad (1)$$

όπου m_i είναι μια βαθμωτή ποσότης που χαρακτηρίζει το σώμα-i και καλείται μάζα του. Αυτός είναι ο αδρανειακός ορισμός της μάζας του σώματος. Η δύναμη $\vec{F}_i$ είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των δυνάμεων $\vec{F}_{ij}$ που ασκούνται πάνω στο σώμα-i από τα υπόλοιπα σώματα-j του συστήματος, δηλ.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots \vec{F}_{iN} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \qquad (2)$$

όπου στο τελευταίο άθροισμα εννοείται ότι δεν περιλαμβάνεται η περίπτωση της αυτοδύναμης i=j. Οι δυνάμεις $\vec{F}_{ij}$ πρέπει να ικανοποιούν τον **3ο νόμο του Νεύτωνα**,

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}, \qquad (3)$$

δηλ. η δράση $\vec{F}_{ij}$ πρέπει να είναι αντίθετη της αντίδρασης, $\vec{F}_{ji}$.

Στη γενική περίπτωση, οι εξισώσεις (1) και (2) πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να περιλαμβάνονται και εξωτερικές δυνάμεις, δηλ. δυνάμεις οι οποίες δρούν πάνω στο σώμα-i και οφείλονται σε εξωγενείς πηγές. Έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα τροποποιείται ως ακολούθως,

$$\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e = m_i \vec{a}_i \qquad (4)$$

όπου $\vec{F}_i^e$ είναι η εξωτερική δύναμη που δρά πάνω στο σώμα-i. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης $\vec{F}_{ij}$ υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα, οπότε αθροίζοντας την (4) πάνω σε όλα τα σώματα-i του συστήματος παίρνουμε,

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i^e = \sum_i m_i \vec{a}_i \ . \qquad (5)$$

Ο πρώτος όρος στη (5) ισούται με μηδέν, διότι κάθε ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}$ απαλείφεται λόγω της (3). Αν καλέσουμε $\vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_i^e$ την ολική εξωτερική δύναμη που δρα πάνω στο σύστημα, τότε η (5) γράφεται

$$\vec{F}_e = \sum_i m_i \vec{a}_i \qquad (6)$$

Αν $\vec{F}_e = 0$, τότε $\sum_i m_i \vec{a}_i = 0$, η οποία γράφεται $\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, δηλ. η συνολική ορμή του συστήματος διατηρείται χρονικά σταθερή, $\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{σταθ.}$, σε κλειστό σύστημα.

Συνήθως, η δύναμη αλληλεπίδρασης $\vec{F}_{ij}$ είναι συνάρτηση της σχετικής απόστασης των σωμάτων i και j, δηλ.

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

(όπου $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$ τα **διανύσματα θέσης** των σωμάτων i και j), και ίσως μερικών άλλων παραμέτρων, όπως τη ταχύτητα. Στην περίπτωση των **κεντρικών δυνάμεων**, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τη σχετική απόσταση μεταξύ των σωμάτων i και j, τότε έχουν την ακόλουθη μορφή,

$$\vec{F}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \cdot f(r_{ij}) \qquad (7)$$

όπου $\tilde{r}_{ij}$ είναι το **μοναδιαίο διάνυσμα** κατά την διεύθυνση από το σώμα-i προς το σώμα-j και $f(r_{ij})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση του r_{ij}. Αν οι δυνάμεις δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα, καλούνται **συντηρητικές δυνάμεις**. Αν η συνάρτηση f>0, τότε η δύναμη $\vec{F}_{ij}$ είναι απωστική δύναμη, ενώ αν f<0, τότε η δύναμη $\vec{F}_{ij}$ είναι ελκτική δύναμη. Ως παράδειγμα αναφέρουμε την δύναμη παγκοσμίου έλξης μεταξύ των μαζών m_i και m_j,

$$f(r_{ij}) = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \qquad (8)$$

όπου $G=6.67\times10^{-11}$Nt-m^2/Kgr^2 είναι η παγκόσμιος σταθερά έλξης. Εφόσον όλες οι ποσότητες του δευτέρου μέρους είναι θετικές, έπεται ότι f<0, άρα η δύναμη βαρύτητος είναι έλκτική!

Οι συντηρητικές δυνάμεις έχουν ένα κοινό γνώρισμα: την ύπαρξη μιάς διατηρούμενης ποσότητας του συστήματος, της **ενέργειας**. Παρομοίως, θα δούμε ότι και οι κεντρικές δυνάμεις συνδέονται με την διατήρηση της **στροφορμής** του συστήματος. Όμως για παράδειγμα οι **ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις** (οι οποίες είναι οι ασκούμενες δυνάμεις μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων), δεν είναι ούτε κεντρικές, ούτε συντηρητικές, ούτε ικανοποιούν τον 3^o νόμο του Νεύτωνα. Βέβαια με την εισαγωγή της έννοιας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορούμε να ερμηνεύσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτίων. Χονδρικά υποθέτουμε ότι ένα φορτίο αλληλεπιδρά άμεσα με το γειτονικό του ΗΜΜ πεδίο, και το τελευταίο με τη σειρά του τροποποιεί το πεδίο πιο πέρα κοκ. Υποθέτουμε ότι το ΗΜΜ πεδίο μεταφέρει ορμή και ενέργεια, οπότε μπορούμε να γράψουμε του νόμους διατήρησης, οι οποίοι βασικά απορρέουν από τους νόμους του Νεύτωνα. Όμως υπάρχει ακόμα μια αντίφαση ανάμεσα στη κλασσική ΗΜΜ θεωρία και την σχετικιστική μηχανική που μπορεί όμως να απαλειφθεί όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.