

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
TEM-385: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ MONTE CARLO

Εαρινό Εξάμηνο 2013/14

3^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ημερομηνία Παράδοσης: Μέχρι την Κυριακή 18/05 ώρα 24:00. Η παράδοση θα γίνει στέλνοντας με email το αρχείο αναφοράς σε μορφή pdf στο διδάσκοντα και στη βοηθό του μαθήματος. Στην αναφορά θα πρέπει επίσης να αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ, αριθμός εξαμήνου.

ΑΣΚΗΣΗ : Αλγόριθμος Metropolis

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η μελέτη αλγορίθμων Monte Carlo Μαρκοβιανών Αλυσίδων (MCMC) τύπου Metropolis τυχαίου περιπάτου (random walk). Έστω τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) x , η Μαρκοβιανή αλυσίδα της οποίας δίνεται από τον κανόνα μετάβασης:

$$y_t = x^{(t)} + A\varepsilon_t$$

όπου $x^{(t)}$ είναι η τιμή της τ.μ. στην επανάληψη t και y_t η προτεινόμενη τιμή στην επόμενη επανάληψη. A είναι μια σταθερά και ε_t μια τυχαία μεταβλητή η οποία έρχεται μέσα από μια συμμετρική κατανομή $f()$. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα, που σχετίζεται με την κατανομή f , είναι τυχαίος περίπατος στη μεταβλητή ε και στην μεταβλητή x .

Δημιουργήστε γενικό αλγόριθμο Metropolis MC της μορφής:

- Δεδομένου $x^{(t)}$ δημιουργήστε $y_t \sim f(|y - x^{(t)}|)$.

$$\bullet \quad x^{(t+1)} = \begin{cases} y_t, & \text{με πιθανότητα } \rho(x^{(t)}, y_t) = \min \left\{ 1, \frac{f(y_t)}{f(x^{(t)})} \right\} \\ x^{(t)}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Χρησιμοποιήστε σαν $f()$:

- (α) Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\delta, \delta]$,
- (β) Κανονική κατανομή $N(0,1)$ στο διάστημα $[-\delta, \delta]$.
- (γ) Εκθετική κατανομή $\text{Exp}()$, στο διάστημα $[-\delta, \delta]$, αφού πρώτα την κανονικοποιήσετε.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις δ είναι μια σταθερά.

1) Περιγράψτε τον αλγόριθμο Metropolis. Βρείτε την πιθανότητα αποδοχής συναρτήσει της σταθεράς A .

2) Τρέξτε τον αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές των σταθερών δ και A : π.χ. ($\delta=0.5, A=4$), ($\delta=1.0, A=4$), ($\delta=0.5, A=2$), ($\delta=0.5, A=10$), για τις τρεις διαφορετικές κατανομές. Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την κατανομή πιθανότητας της (τ.μ.) x σε μορφή ιστογράμματος.

3) Τρέξτε τον αλγόριθμο για διαφορετικές τιμές του μεγέθους της αλυσίδας (αριθμός των επαναλήψεων) n , π.χ. $n=1000, 10000, 100000$. Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση την κατανομή πιθανότητας της (τ.μ.) x σε μορφή ιστογράμματος.

4) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διακύμανση για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις των ερωτημάτων (2) και (3). Εξετάστε επίσης τη σύγκλιση της μέσης τιμής κάνοντας διαγράμματα μέσης τιμής, $\mu(i)$, συνάρτησης της επανάληψης $i, i=1,2,\dots,n$.

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις (μέση τιμή, διακύμανση) και αιτιολογήστε τις διαφορές.