

**ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**TEM-385: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ MONTE CARLO**

Εαρινό Εξάμηνο 2013/14

**2<sup>η</sup> ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**Ημερομηνία Παράδοσης:** Μέχρι την Κυριακή 04/05 ώρα 24:00. Η παράδοση θα γίνει στέλνοντας με email το αρχείο αναφοράς σε μορφή pdf στο διδάσκοντα και στη βοήθό του μαθήματος. Στην αναφορά θα πρέπει επίσης να αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ, αριθμός εξαμήνου.

**ΑΣΚΗΣΗ : Importance Sampling**

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η εξέταση της σημαντικής δειγματοληψίας (importance sampling). Έστω ότι ζητάμε την αναμενόμενη τιμή (expectation value) της συνάρτησης  $h(x)$ , όπου η  $x$  υπακούει μια κατανομή  $g(x)$  (κατανομή  $\chi$ ), δηλαδή το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_a^b h(x) g(x) dx.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε σαν βοηθητική κατανομή  $f(x)$  μια κανονική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα:

$$h(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2.5} x\right), \quad x \geq 1$$

$$g'(x) = cg(x) = x^{(1.5)-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \geq 1$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(2.5)} \exp\left(-\frac{(0.8-x)^2}{2(2.5)}\right)$$

Προσέξτε ότι οι  $g'(x)$ ,  $f(x)$  δεν είναι κανονικοποιημένες, δηλαδή γνωρίζουμε τις κατανομές μόνο ως προς μια σταθερά. Επίσης εφόσον η  $g(x)$  είναι μόνο για  $x \geq 1$  πρέπει όταν δειγματοληπτούμε από την  $f(x)$  να διαγράφουμε κάθε  $x < 1$ .

A) Κάντε γραφική παράσταση των  $h(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$ .

B) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα  $[1, 7]$  για  $n$  δείγμα τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας αλγόριθμο Monte Carlo σημαντικής δειγματοληψίας. Το ολοκλήρωμα

υπολογίζεται ως: 
$$\hat{I} = \frac{\sum_{i=1}^n w(x_i)h(x_i)}{\sum_{i=1}^n w(x_i)}$$
 όπου:  $w(x_i) = g(x_i) / f(x_i)$ .

Θεωρείστε  $n = 500$ . Τρέξτε τον αλγόριθμο για  $m$  φορές ( $m=10$ ) και υπολογίστε το μέσο όρο. Υπολογίστε επίσης τη διακύμανση (variance) του δείγματος.

Γ) Επαναλάβετε το (B) για διαφορετικές τιμές του  $n$ :  $n=1000$ ,  $n=10000$ . Συγκρίνετε τα αποτελέσματα σε ένα πίνακα με αυτά που βρήκατε στο (B).

Δ) Επαναλάβετε τα (B), (Γ) για μια κατανομή  $f(x)$  με μέση τιμή στο 5. Συζητήστε τις διαφορές των αποτελεσμάτων.

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις των διαφορετικών μεθόδων και αιτιολογήστε τις διαφορές.