

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
TEM-385: ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ MONTE CARLO

Εαρινό Εξάμηνο 2013/14

1^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ημερομηνία Παράδοσης: Μέχρι την Κυριακή 30/03 ώρα 24:00. Η παράδοση θα γίνει στέλνοντας με email το αρχείο αναφοράς σε μορφή pdf στο διδάσκοντα και στους βοηθούς του μαθήματος. Στην αναφορά θα πρέπει επίσης να αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ, αριθμός εξαμήνου.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Γεννήτριες Τυχαίων Αριθμών (70 Μονάδες)

Στόχος της άσκησης αυτής είναι η εξέταση της αποδοτικότητας γεννητριών τυχαίων αριθμών. Για τα παρακάτω προγράμματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού προτιμάτε (π.χ. MATLAB, C++, Fortran90).

A) Θεωρήστε τον παρακάτω αλγόριθμο δημιουργίας ακολουθίας τυχαίων αριθμών (congruential generator), $X=[X_i]$ ($i=1,2,\dots,n$):

$$Y_i = D(x) = (aY_{i-1} + b) \bmod (M), \quad X_i = Y_i / M$$

όπου a, b, M είναι σταθερές (φυσικοί αριθμοί). Υπολογίστε:

- (1) Αν, για δεδομένο n , η ακολουθία X υπακούει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Υπολογίστε την πιθανότητα κάνοντας το ιστόγραμμα της X .
- (2) Μελετήστε αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ διαδοχικών τυχαίων αριθμών κάνοντας το διάγραμμα X_{2k-1} , vs. X_{2k} .

Θεωρήστε διαφορετικές τιμές για τις σταθερές (π.χ. $a=453$, $b=10$, $M=2^{13}$) και διαφορετικές τιμές του n .

B) Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχουν καλύτεροι αλγόριθμοι δημιουργίας τυχαίων αριθμών. Θεωρείστε την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. MATLAB: συνάρτηση *rand*, Mersenne Twister algorithm). Περιγράψτε τον παραπάνω αλγόριθμο Mersenne Twister (<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html>).

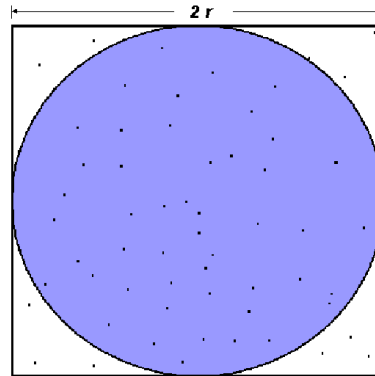
Γ) Επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για την προεπιλεγμένη γεννήτρια τυχαίων αριθμών της γλώσσας που χρησιμοποιείται (π.χ. MATLAB: συνάρτηση *rand*, Mersenne Twister algorithm).

Γράψτε μια αναφορά που περιέχει τα εξής:

1. Συνοπτική περιγραφή των αλγορίθμων που χρησιμοποιείται.
2. Παράθεση και περιγραφή των αποτελεσμάτων. Συγκρίνετε τις αποδόσεις των διαφορετικών μεθόδων και αιτιολογήστε τις διαφορές.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογισμός του Αριθμού π (30 Μονάδες)

Θεωρήστε τον αλγόριθμο υπολογισμού του αριθμού π που συζητήσαμε στην τάξη και ο οποίος βασίζεται στον υπολογισμό του εμβαδόν ενός κύκλου και του τετραγώνου με το οποίο τον περικλείουμε (*raindrop experiment*).



$$\begin{aligned}A_S &= (2r)^2 = 4r^2 \\A_C &= \pi r^2 \\ \pi &= 4 \times \frac{A_C}{A_S}\end{aligned}$$

Φτιάξτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του π χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Έστω n ο αριθμός των τυχαίων σημείων μέσα στο τετράγωνο. Βρείτε και γράψτε σε μια αναφορά τα ακόλουθα:

A) Περιγράψτε λεπτομερώς τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείτε.

B) Υπολογίστε τον αριθμό π για $n = 1000, 10000, 1000000$; Για καλύτερη ακρίβεια τρέξτε το πρόγραμμα 10 φορές για κάθε n και υπολογίστε τη μέση τιμή του π . Φτιάξτε ένα διάγραμμα με όλες τις τιμές (εκτιμήσεις) του π .

Γ) Υπολογίστε το σφάλμα των μετρήσεων χρησιμοποιώντας την ακριβή τιμή του αριθμού π ($\pi = 3,141592653589793$). Κάντε το διάγραμμα του σφάλματος της μέτρησης ως προς τον αριθμό των τυχαίων σημείων n . Εκτιμήστε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n για ακρίβεια υπολογισμού του π ίση με: 3, 5, 7 σημαντικών ψηφίων.