Φυλλάδιο 2

① Έστω πίνακας S (στον $\mathbb{R}^3$) που είναι συμμετρικός και έχει συνιστώσες

$$-S_{11} = S_{33} = \frac{1}{3}\ , \quad -S_{12} = -S_{21} = S_{23} = S_{32} = \frac{2}{3}\ , \quad S_{22} = S_{31} = S_{13} = 0$$

ⓐ Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και ~~ιδιοδιανύσματα~~ ιδιοδιανύσματα του πίνακα S.

ⓑ Υπολογίστε την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dh}{dt} = Sh$$

$$h(0) = h_0 \in \mathbb{R}^3$$

② Δίνεται αντισυμμετρικός πίνακας W (δηλ. $W^T = -W$) και όπως είδαμε στην τάξη υπάρχει διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε

$$Wh = \frac{1}{2}\, w \times h \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^3$$

Το διάνυσμα w λέγεται το αξονικό διάνυσμα του τανυστή W.

Έστω W_1, W_2 δύο αντισυμμετρικοί πίνακες με αντίστοιχα αξονικά διανύσματα w_1 και w_2.

Δείξτε ότι

$$W_1 W_2 = w_2 \otimes w_1 - (w_1 \cdot w_2)\, I$$

$$tr(W_1 W_2) = -2\,(w_1 \cdot w_2)$$

③ Θεωρείστε την κίνηση

$$x = f(R,t)\,\frac{X}{R} \qquad \text{όπου} \qquad X \in \mathbb{R}^3,\ |X| = R$$

όπου f είναι μονότονη, ομαλή συνάρτηση του R, ορισμένη για $R>0$.

ⓐ Υπολογίστε τον τανυστή των παραμορφώσεων $F = \nabla_X x$ και δείξτε ότι μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$F = \nabla_X x = \left(\frac{\partial f}{\partial R} - \frac{f}{R}\right)\frac{X}{R}\otimes\frac{X}{R} + \frac{f}{R}\,I$$

ⓑ Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του τανυστή F

ⓒ Σχεδιάστε το πλαίσιο αναφοράς και το τρέχον πλαίσιο (Θεωρείστε για πλαίσιο αναφοράς το εσωτερικό σφαίρας $0<R<A$, όπου A σταθερά, $R=|X|$).

(1) (a) Αποδείξτε τις διανυσματικές ταυτότητες

$$\frac{1}{2}\nabla(F\cdot F) = F \times \mathrm{curl}\,F + (F\cdot\nabla)F$$

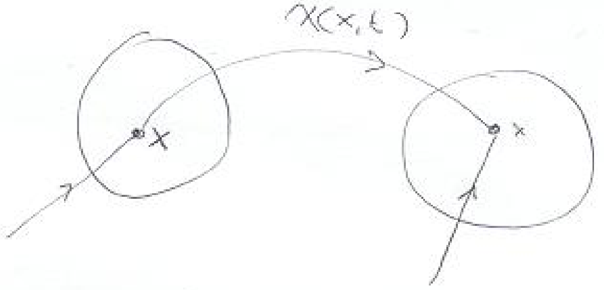
$$\mathrm{curl}(F\times G) = F\,\mathrm{div}\,G - G\,\mathrm{div}\,F + (G\cdot\nabla)F - (F\cdot\nabla)G$$

όπου F, G διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^3$.

(b) Έστω (ρ, v) η λύση των ισεντροπικών εξισώσεων Euler. Δείξτε ότι $\omega = \frac{\xi}{\rho}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega\cdot\nabla)v \qquad (*)$$

(c) Δίνεται $\chi(x,t)$ η κίνηση ενός ρευστού κατά την συνήθη εικόνα από τα πλαίσιο αναφοράς στο τρέχον πλαίσιο



Ορίστε την συνάρτηση

$$G(x,t) = \nabla\chi(x,t)\cdot\omega(\chi(x,0),0)$$

και την αντίστοιχη συνάρτηση g σε Eulerian συντεταγμένες

$$G(x,t) = g(\chi(x,t),t) = \nabla\chi(x,t)\,\omega(\chi(x,0),0)$$

Δείξτε ότι

$$\frac{Dg}{Dt} = (g\cdot\nabla)v$$

Συγκρίνετε με την $(*)$