Φυλλάδιο ασκήσεων 1.

① Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων στον $\mathbb{R}^2$

$$u = ax^2, \quad v = bxy \qquad a, b \text{ σταθερές}$$

ⓐ Ποιά είναι η σχέση των a, b ούτως ώστε το πεδίο να παριστά ασυμπίεστη ροή.

ⓑ Να κατασκευάσετε τις γραμμές ροής και να βρείτε τα σημεία ανακοπής της ροής (αυτά για τα οποία $\underset{\sim}{u} = (u, v) = \underset{\sim}{0}$).

② Δίνεται σταθερό διάνυσμα $\underset{\sim}{\xi} \in \mathbb{R}^3$.
Επιλύστε το διαφορικό σύστημα

$$\frac{d\underset{\sim}{h}}{dt} = \frac{1}{2}\, \underset{\sim}{\xi} \times \underset{\sim}{h}$$

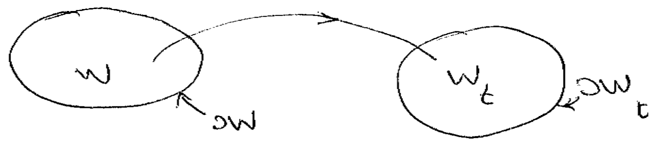
$$\underset{\sim}{h}(0) = \underset{\sim}{h}_0$$

Δείξτε ότι η λύση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\underset{\sim}{h}(t) = R(t, \underset{\sim}{\xi})\, \underset{\sim}{h}_0$$

όπου R είναι πίνακας που παριστά περιστροφή κατά γωνία t γύρω από τον άξονα $\underset{\sim}{\xi}$.

(3) Ρευστό κινείται από την αρχική θέση W για $t=0$ στην θέση W_t σε χρόνο t. (δείτε το σχήμα)



(a) Δείξτε το Θεώρημα μεταφοράς: Εάν $f(x,t)$ είναι συνάρτηση τότε

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f \, dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dV$$

όπου $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla) f$ η υλική παράγωγος του f.

(b) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα μεταφοράς για να αποδείξετε την φόρμουλα

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f(x,t) \, dV = \int_{W_t} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \, dV + \int_{\partial W_t} f v \cdot n \, dA.$$

(4) Μια κίνηση $\chi : X \longmapsto x$, $x = \chi(X,t)$, λέγεται στερεά αν

$$|x-y| = |X-Y| \qquad \forall \, X, Y$$

Δείξτε ότι η χ είναι στερεά κίνηση εάν και μόνον εάν

$$\chi(X,t) = c(t) + Q(t) X \qquad \text{όπου} \quad c(t) \in \mathbb{R}^3$$

$Q(t)$ ορθογώνιος πίνακας