ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

Γ. Ν. Μακράκης

Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών, ΙΤΕ

&

Τμήμα Μαθηματικών, ΠΚ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 95

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1994.

2. Sir Horace Lamb, Hydrodynamics, Dover, N.Y., 1945

3. A. Chorin and J. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, N.Y., 1993

4. P.G. Saffman, Vortex Dynamics, Cambridge University Press, 1992

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

1. Οι φυσικές ιδιότητες των ρευστών

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 95

Γ.Ν. Μακράκης

0. Εισαγωγή: Στερεά, υγρά και αέρια

Η βασική μακροσκοπική ιδιότητα των ρευστών (υγρών και αερίων), η οποία τα διαχωρίζει από τα στερεά, είναι η ευκολία με την οποία μπορούν να παραμορφωθούν. Ένα κομμάτι στερεού υλικού έχει καθορισμένο σχήμα το οποίο αλλάζει όταν μεταβληθούν οι εξωτερικές (π.χ. θερμοκρασία # πίεση) συνθήκες. Αντίθετα μία ποσότητα ρευστού δεν έχει καθορισμένο σχήμα, διαφορετικά "στοιχεία" ενός ομογενούς ρευστού ("σχήμα δοχείου") μπορούν να αλλάξουν θέση στο χώρο κινούμενα σχεδόν ελεύθερα, χωρίς οι μακροσκοπικές ιδιότητες του ρευστού να μεταβληθούν.

Ωστόσο ο διαχωρισμός μεταξύ ρευστών και στερεών δεν είναι πάντα αυστηρός, δεδομένου ότι υπάρχουν αρκετά υλικά τα οποία συμπεριφέρονται κάτω από διαφορετικές συνθήκες είτε ως στερεά είτε ως ρευστά. Ως "απλό στερεό" θεωρείται ένα υλικό του οποίου το σχήμα και η σχετική θέση των στοιχείων του αλλάζουν λίγο, όταν οι εξωτερικές δυνάμεις που δρούν σ' αυτό αλλάξουν επίσης λίγο. Αντίθετα, ως "απλό ρευστό" μπορούμε να θεωρήσουμε ένα υλικό του οποίου οι σχετικές θέσεις των στοιχείων του αλλάζουν κατά πολύ όταν δράσουν κατάλληλες δυνάμεις έστω και μικρής έντασης. Αλλά ακόμη και εάν οι δύο τελευταίοι "ορισμοί" μπορούσαν να θεωρηθούν επαρκώς ακριβείς, είναι γνωστό ότι πολλά υλικά έχουν διπλό χαρακτήρα (στερεού/ρευστού), πολλές δε φορές και τους δύο χαρακτήρες ταυτόχρονα (π.χ. μίγματα πολυμερών).

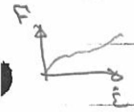
Ευτυχώς όμως, πολλά συνήθη ρευστά, όπως το νερό και ο αέρας, είναι επαρκώς απλά σύμφωνα με τους παραπάνω "ορισμούς", και τούτο "δικαιώνει" το ότι θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της συμπεριφοράς και κυρίως της κίνησης απλών ρευστών.

Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε από δω και πέρα, είναι ότι το ρευστό που μελετάμε δεν μπορεί να αντισταθεί σε δυνάμεις που το παραμορφώνουν χωρίς αλλαγή του όγκου του. Ωστόσο πρέπει να τονισθεί ότι ένα απλό ρευστό μπορεί να προβάλλει αντίσταση στην παραμόρφωσή του, και το νόημα της υπόθεσης που κάναμε είναι ότι η προβαλλόμενη αντίσταση δεν μπορεί τελικά να εμποδίσει την παραμόρφωση (δηλ. οι δυνάμεις αντίστασης του ρευστού μηδενίζονται με το ρυθμό παραμόρφωσης).

$\Delta l/l$

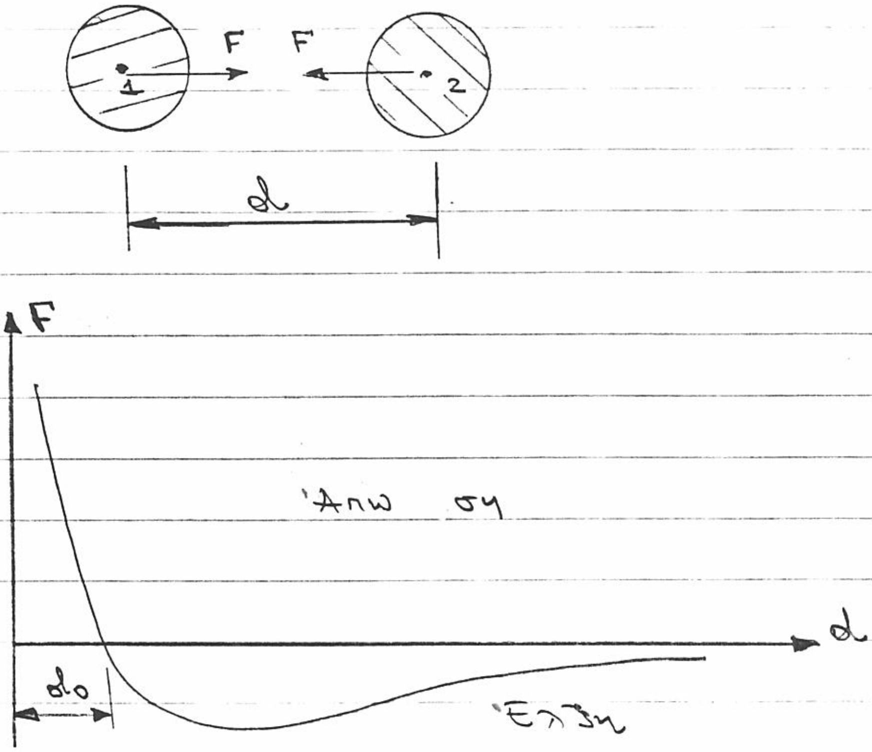
$\varepsilon'' = \varepsilon(t)$

$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$



Η διάκριση μεταξύ υγρών και αερίων είναι λιγότερο σημαντική όταν μελετάμε τη δυναμική συμπεριφορά των ρευστών. Γιά λόγους που σχετίζονται με τη φύση των ενδομοριακών δυνάμεων πολλές ουσίες μπορούν να υπάρχουν σε μία εκ των δύο ευσταθών φάσεων που έχουν την ιδιότητα της ρευστότητας (= μεγάλη παραμορφωσιμότητα), την υγρά ή την αέρια. Η πυκνότητα όμως στην υγρά φάση είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι στην αέρια, αλλά τούτο δεν αποτελεί σημαντική διαφορά διότι ουσιαστικά επηρεάζει μόνο την απαιτούμενη δύναμη γιά να επιταχύνουμε μία ορισμένη ποσότητα του ρευστού, αλλά όχι και τη μορφή της κίνησης. Η πιό σημαντική διαφορά στις μηχανικές ιδιότητες μεταξύ υγρών και αερίων, είναι η συμπιεστότητα. Τα αέρια μπορούν να συμπιεστούν πολύ περισσότερο από τα υγρά, και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την μεγάλη μεταβολή του ειδικού όγκου ($'' \Delta V/V$) κατά την κίνηση αερίων, όταν αυτή συνοδεύεται από σημαντικές μεταβολές της πίεσης ($\Delta p = f(\Delta V)$).

Γενικά οι ιδιότητες των στερεών και των ρευστών σχετίζονται άμμεσα με τη <u>μοριακή δομή</u> και τη <u>φύση των ενδομοριακών δυνάμεων</u>. Πολύ απλοϊκά αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε θεωρώντας τη δύναμη F που αναπτύσσεται μεταξύ δύο μεμονωμένων μορίων σα συνάρτηση της απόστασής τους d (ΣΧΗΜΑ 1).



<u>ΣΧΗΜΑ 1</u>

<u>Μικρά d</u> ($\sim 10^{-8}$ cm για απλά μόρια): έλξη η απώθηση με ισχυρές δυνάμεις κβαντικού τύπου, ανάλογα με το αν υπάρχει ανταλλαγή ηλεκτρονίων στον εξωτερικό φλοιό (έλξη - χημικός δεσμός).
<u>Μεγάλα d</u> ($\sim 10^{-7}$ η 10^{-6} cm): ασθενής έλξη.

<u>d_0 = θέση ευσταθούς ισορροπίας</u> ($\sim 3 \div 4 \times 10^{-8}$ cm για τα περισσότερα απλά μόρια).

Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα μόρια όλων των υλικών βρίσκονται σε συνεχή κίνηση (θερμική κίνηση) η οποία μάλιστα δεν είναι ντετερμινιστική αλλά στοχαστική, μπορούμε να διακρίνουμε ποιοτικά (και πολύ γενικά) τις παραπάνω διαφορές μεταξύ στερεών, υγρών και αερίων.

	Ενδομοριακές δυνάμεις	ℓ/d_o	Μοριακή διάταξη	Απαιτούμενη στατιστική
στερεά	ισχυρές	$\ll 1$	ολική	κβαντική
υγρά	μεσαίες	≈ 1	μερική	κβαντική + κλασσική
αέρια	ασθενείς	$\gg 1$	καθόλου	κλασσική

ℓ = "πλάτος" τυχαίας θερμικής κίνησης μορίων
κάποια μέση τιμή, κατάλληλα ορισμένη

1.1. Η υπόθεση του συνεχούς μέσου

Τα μόρια ενός αερίου διαχωρίζονται από περιοχές κενού, του οποίου οι διαστάσεις είναι πολύ μεγαλύτερες των διαστάσεων του μορίου. Ακόμη και στα υγρά όπου τα μόρια βρίσκονται το ένα σχετικά κοντά στο άλλο (όσο αυτό επιτρέπεται από τις απωθητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται όταν πλησιάσουν αρκετά), η μάζα του υλικού είναι κατά μεγάλο μέρος συγκεντρωμένη στους πυρήνες των ατόμων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ύλη να μην κατανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο που κατέχει το υγρό. Όμοια και άλλες ιδιότητες όπως η σύνθεση, η η ταχύτητα, έχουν ανομοιόμορφη κατανομή όταν εξετάζουμε το ρευστό σε μικροσκοπική κλίμακα.

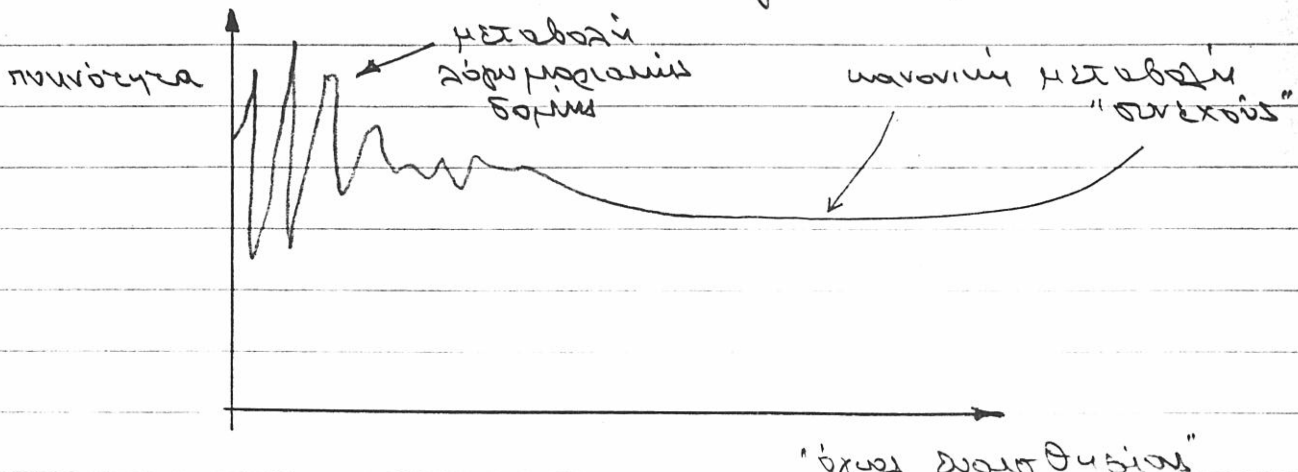
Ομως η μηχανική των ρευστών ασχολείται με την μακροσκοπική περιγραφή, σε κλίμακα όπου οι διαστάσεις του χωρίου που καταλαμβάνει το ρευστό είναι πολύ μεγαλύτερες των αποστάσεων μεταξύ των μορίων. Σαν αποτέλεσμα αυτού η μοριακή δομή συνήθως δεν λαμβάνεται υπ' όψιν κατά άμεσο τρόπο, γίνεται δηλ. η

<u>Υπόθεση συνεχούς μέσου</u>: Η μακροσκοπική συμπεριφορά του ρευστού είναι η ίδια ωσάν αυτό να είχε ιδανικώς συνεχή δομή.

<u>Φυσικές</u> ποσότητες όπως η μάζα και η ορμή οι οποίες αντιστοιχούν στο ρευστό που καταλαμβάνει ένα μικρό όγκο, θα θεωρούνται ότι κατανέμονται συνεχώς μέσα σ' αυτόν τον όγκο αντί να θεωρούνται συγκεντρωμένες σ' ένα μικρό κλάσμα αυτού του όγκου (όπως στην πραγματικότητα συμβαίνει).

Η ισχύς της υπόθεσης συνεχούς μέσου είναι σύμφωνη με την εμπειρία μας. Πράγματι, η δομή του νερού και του
? αέρα "είναι "προφανώς" <u>συνεχής</u>" και "<u>ομαλά μεταβαλλό-</u>
? <u>μενη</u>", <u>τουλάχιστον όταν την παρατηρούμε με τα συνήθη μετρητικά όργανα</u>, ώστε η υπόθεση συνεχούς μέσου να φαίνεται πολύ φυσική.

Οταν ένα μετρητικό όργανο τοποθετείται μέσα σε ένα ρευστό, κατά κάποιον τρόπο επηρεάζεται από το ρευστό που βρίσκεται σε ένα μικρό όγκο κοντά στο όργανο, και τελικά μας δίνει ένα <u>μέσο όρο της μετρούμενης ιδιότητας</u> πάνω σ' ένα "όγκο ευαισθησίας" (και μερικές φορές μέσα σ' ένα "χρόνο ευαισθησίας"). Τα μετρητικά όργανα σχεδιάζονται ώστε ο "όγκος ευαισθησίας" να είναι επαρκώς μικρός, και η μέτρηση να μπορεί να θεωρηθεί "τοπική". Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι η η περαιτέρω μείωση του "όγκου ευαισθησίας" δεν μεταβάλλει την ένδειξη του οργάνου. Ο λόγος για τον οποίο η μικροσκοπική δομή του ρευστού δεν επηρεάζει μιά τέτοια μέτρηση, είναι ότι ο "όγκος ευαισθησίας" είναι αρκετά μεγάλος ώστε να περιέχει επαρκώς μεγάλο αριθμό μορίων ώστε οι μεταβολές της ιδιότητας που επάγει κάθε μόριο να μην επηρεάζει τον παρατηρούμενο μέσο όρο. Στο ΣΧΗΜΑ 2 φαίνεται η μεταβολή πυκνότητος όταν αλλάζει ο "όγκος ευαισθησίας".



ΣΧΗΜΑ 2

N.B. Υπάρχουν περιπτώσεις (π.χ. κίνηση βλημάτων σε πολύ αραιή ατμόσφαιρα στα μεγάλα ύψη, κρουστικά κύματα), όπου ανακύπτουν σοβαρές δυσκολίες στην επιλογή του "όγκου ευαισθησίας" και στον ορισμό μιάς τοπικής μέτρησης.

α επιτυγχάνουμε πό μαθηματική ποψη:

Η υπόθεση συνεχούς μέσου μας επιτρέπει να δώσουμε νόημα στην "σημειακή τιμή" διαφόρων ιδιοτήτων του ρευστού (πυκνότητα, ταχύτητα, θερμοκρασία), και γενικά οι τιμές αυτές είναι συναρτήσεις του χρόνου και της θέσης στο ρευστό. Με βάση το γεγονός αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του ρευστού ανεξάρτητα από τη μοριακή του δομή (οπότε υγρά και αέρια μελετώνται ως ένα βαθμό ταυτόχρονα). Μία όμοια υπόθεση γίνεται στη μηχανική των στερεών, και τα δύο αντικείμενα (μηχανική ρευστών και στερεών) μελετώνται από τη μηχανική των συνεχών μέσων.

Παρά το γεγονός ότι η υπόθεση του συνεχούς είναι φυσιολογική, είναι πολλές φορές δύσκολο να καθορισθούν οι ιδιότητες του υποθετικού συνεχούς μέσου το οποίο κινείται κατά τον ίδιο τρόπο με το αντίστοιχο πραγματικό ρευστό, το οποίο έχει μία συγκεκριμένη μοριακή δομή. Για παράδειγμα η λεγόμενη κινητική θεωρία των αερίων έχει χρησιμοποιηθεί γιά τον καθορισμό των εξισώσεων που διέπουν την "τοπική" ταχύτητα, με τη βοήθεια απλοποιητικών παραδοχών γιά το μοντέλο των συγκρούσεων μεταξύ των μορίων του αερίου. Κλείνοντας είναι σκόπιμο να τονισθεί ότι η κατασκευή εξισώσεων συνεχούς μέσου που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένα πραγματικά υλικά με δοθείσα (ντετερμινιστική ή στοχαστική) μοριακή δομή είναι μία περιοχή έντονης και ενδιαφέρουσας έρευνας στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

1.2. Μαζικές και επιφανειακές δυνάμεις στα ρευστά

1.2.1. Είδος και φύση των δυνάμεων

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω σε μία ποσότητα ρευστού είναι δυνατόν να διαχωριστούν σε δύο ομάδες. Στις δυνάμεις δράσεως από απόσταση ή (καλλίτερα) πεδιακές δυνάμεις (π.χ. βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις), και στις δυνάμεις κοντινής δράσεως η (καλλίτερα) δυνάμεις επαφής (τέτοιες είναι οι ενδομοριακές δυνάμεις, οι δυνάμεις τριβής, κλπ.). Οι πρώτες ελαττώνονται εν γένει αργά ως συνάρτηση της απόστασης, και είναι σημαντικές ακόμη και σε αποστάσεις συγκρίσιμες με τις διαστάσεις του όγκου που καταλαμβάνει το ρευστό. Αντίθετα οι δεύτερες ελαττώνονται πολύ γρήγορα με την απόσταση, και ουσιαστικά είναι αμελητέες, εκτός αν υπάρχει μηχανική επαφή μεταξύ των αλληλεπιδρώντων στοιχείων ρευστού (είναι σημαντικές μόνο σε αποστάσεις συγκρίσιμες με τις αποστάσεις μεταξύ των μορίων του ρευστού). Όσον αφορά τη φύση των δυνάμεων επαφής οφείλονται: (i) στα μεν αέρια στην ανταλλαγή ορμής μεταξύ των μορίων (ii) στα δε υγρά τόσο στη μεταφορά ορμής όσο και στις δυνάμεις μεταξύ μορίων υγρού που βρίσκονται εκατέρωθεν της νοητής επιφάνειας όπου μελετάμε τις δυνάμεις επαφής. Οι δύο αυτές συνεισφορές είναι σημαντικού μεγέθους, αλλά δρουν κατά προσέγγιση σε αντίθετες κατευθύνσεις, οπότε η συνισταμένη τους είναι κατά πολύ μικρότερη από κάθε μία. Ωστόσο, στα πλαίσια της υπόθεσης συνεχούς μέσου οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού δεν εξαρτώνται από τη μοριακή φύση των δυνάμεων επαφής, και για το λόγο αυτό δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω μ' αυτές.

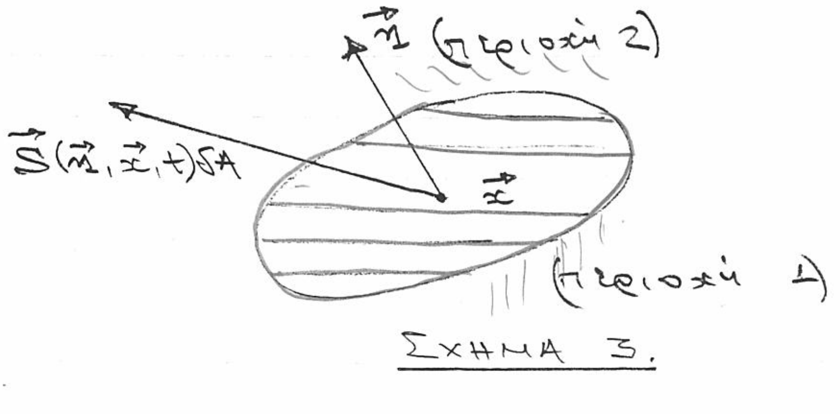
1.2.2. Η έννοια της τάσεως

Εάν ένα στοιχείο μάζας ρευστού υπόκειται σε δυνάμεις επαφής που ανακύπτουν είτε από την επαφή με άλλο στοιχείο ρευστού, είτε από την επαφή με ένα στερεό σύνορο που περιορίζει τον όγκο που καταλαμβάνει το ρευστό, οι δυνάμεις αυτές δρούν μέσα σ' ένα λεπτό "στρώμα" κοντά στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των στοιχείων ρευστού ή μεταξύ ρευστού και στερεού συνόρου. Η συνισταμένη δύναμη επαφής εξαρτάται από το <u>εμβαδό</u> και τον <u>προσανατολισμό</u> της διαχωριστικής επιφάνειας και <u>όχι από τον όγκο</u> του θεωρούμενου στοιχείου.

Έτσι θεωρούμε ένα επίπεδο στοιχείο επιφάνειας στο ρευστό, και θεωρούμε την συνολική δύναμη επαφής που ασκεί το ρευστό που βρίσκεται από τη μιά μεριά του στοιχείου, στο ρευστό που βρίσκεται στην άλλη μεριά του στοιχείου. Θεωρώντας ότι το "στρώμα" δράσεως των δυνάμεων επαφής έχει πολύ μικρό πάχος σε σχέση με τις γραμμικές διαστάσεις του θεωρούμενου στοιχείου, η συνολική δύναμη επαφής είναι <u>ανάλογη με το εμβαδό δA</u> του στοιχείου και ίση με

$$\vec{S}(\vec{n},\vec{x},t)\,\delta A$$ $\vec{S}$: Δύναμη / μονάδα επιφ.

τη χρονική στιγμή t στη θέση $\vec{x}$ (κέντρο του στοιχείου επιφάνειας δA). $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί του δA στη θέση $\vec{x}$ (ΣΧΗΜΑ 3).

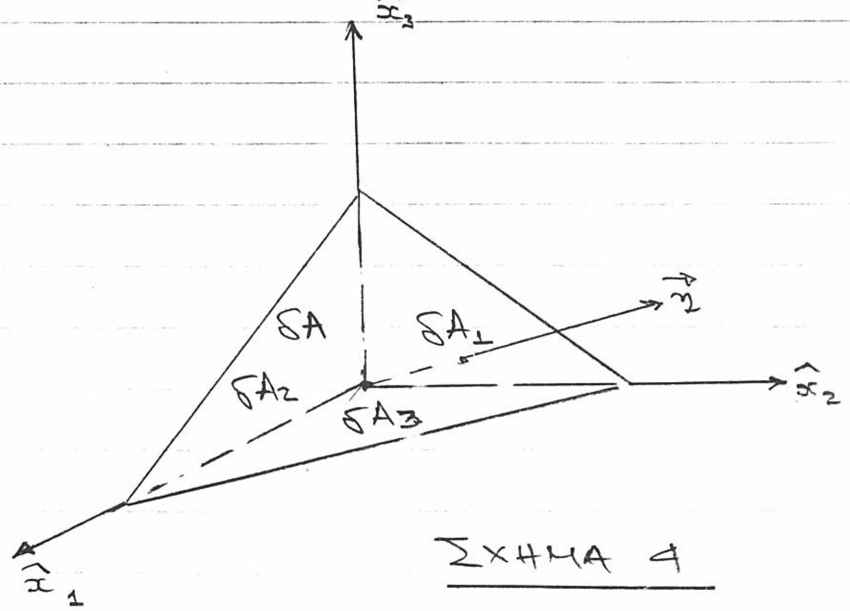


<u>ΣΧΗΜΑ 3.</u>

Το διάνυσμα $\vec{S}$ είναι το <u>διάνυσμα τάσεως</u> πάνω στο ρευστό που βρίσκεται στην περιοχή 1 και θεωρείται θετικό όταν $\vec{S}\cdot\vec{n} > 0$ (εφελκυσμός του ρευστού στην περιοχή 1. Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο Νεύτωνα ("δράσεως - αντιδράσεως") η δύναμη που ασκείται στην περιοχή 2 είναι $-\vec{S}(\vec{n},\vec{x},t)\,\delta A$.

1.2.3. Ο τανυστής τάσεων

Θα διερευνήσουμε τώρα την εξάρτηση του διανύσματος τάσεως $\vec{S}$ (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) από το διάνυσμα $\vec{n}$, δηλ. από τον προσανατολισμό του στοιχείου δA. Για το λόγο αυτό θεωρούμε το στοιχείο ρευστού που ορίζει το τετράεδρο στο ΣΧΗΜΑ 4 με όγκο δV, και έδρες $\delta A, \delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$ με εξωτε-



ΣΧΗΜΑ 4

ρικά κάθετα μοναδιαία διανύσματα $\vec{n}, -\hat{x}_1, -\hat{x}_2, -\hat{x}_3$, αντίστοιχα. Επειδή οι γραμμικές διαστάσεις του τετραέδρου μας είναι πολύ μικρές, θεωρούμε ότι όλες έχουν κέντρο το ίδιο σημείο το οποίο ταυτίζουμε με την αρχή του συστήματος αναφοράς μας, και παραλείπουμε προς στιγμή τα ορίσματα $\vec{x}, t$ στο $\vec{S}$. Η συνολική <u>επιφανειακή δύναμη</u> (δύναμη επαφής) στο στοιχείο μας είναι

$$\delta\vec{F} = \vec{S}(\vec{n})\,\delta A + \vec{S}(-\hat{x}_1)\,\delta A_1 + \vec{S}(-\hat{x}_2)\,\delta A_2 + \vec{S}(-\hat{x}_3)\,\delta A_3 , \qquad (1)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\delta A_1 = \hat{x}_1\cdot\vec{n}\,\delta A ,\quad \delta A_2 = \hat{x}_2\cdot\vec{n}\,\delta A ,\quad \delta A_3 = \hat{x}_3\cdot\vec{n}\,\delta A \qquad (2)$$

έχουμε

$$\delta\vec{F} = \left[\vec{S}(\vec{n}) + \left(\vec{S}(-\hat{x}_1)\hat{x}_1 + \vec{S}(-\hat{x}_2)\hat{x}_2 + \vec{S}(-\hat{x}_3)\hat{x}_3\right)\vec{n}\right]\delta A \qquad (3)$$

Η συνολική πεδιακή δύναμη στο ρευστό που περιέχεται στο τετράεδρο όγκου δV (ο οποίος είναι μικρότερης τάξης μεγέθους από το δA ως προς τις γραμμικές διαστάσεις του τετραέδρου) είναι ανάλογη του δV. Η μάζα του ρευστού στο τετράεδρο

$$\delta m = \rho(\vec{x},t)\,\delta V$$

είναι ίδιας τάξεως μεγέθους με το δV εάν η πυκνότητα είναι πεπερασμένη. Εάν υποθέσουμε επίσης ότι και η επιτάχυνση $\vec{a}(\vec{x},t)$ του ρευστού στο τετράεδρο είναι πεπερασμένη, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τη μάζα του ρευστού μέσα στο τετράεδρο έχει τη μορφή

for particle $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\delta m\cdot\vec{a}(\vec{x},t) = \delta\vec{F} + \vec{b}(\vec{x},t)\,\delta V \qquad (4)$$

όπου $\vec{b}(\vec{x},t)$ η πεδιακή δύναμη ανά μονάδα όγκου.

Συνεπώς, εάν οι γραμμικές διαστάσεις του τετραέδρου τείνουν στο μηδέν, αλλά το σχήμα του διατηρείται σταθερό, ο πρώτος και ο τρίτος όρος στην εξίσωση (4) τείνουν στο μηδέν όπως το δV, ενώ ο δεύτερος όπως το δA. Άρα η (4) ικανοποιείται αν ο συντελεστής του δA στο $\delta \vec{F}$ μηδενίζεται, δηλ.

$$\vec{S}(\vec{n}) = \left[\vec{S}(-\hat{x}_1)\hat{x}_1 + \vec{S}(-\hat{x}_2)\hat{x}_2 + \vec{S}(-\hat{x}_3)\hat{x}_3\right]\vec{n} \qquad (5)$$

Η εξίσωση (5) μπορεί να γραφεί στη μορφή

S_i = συνιστώσες του $\vec{S}$

$$S_i(\vec{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (6)$$

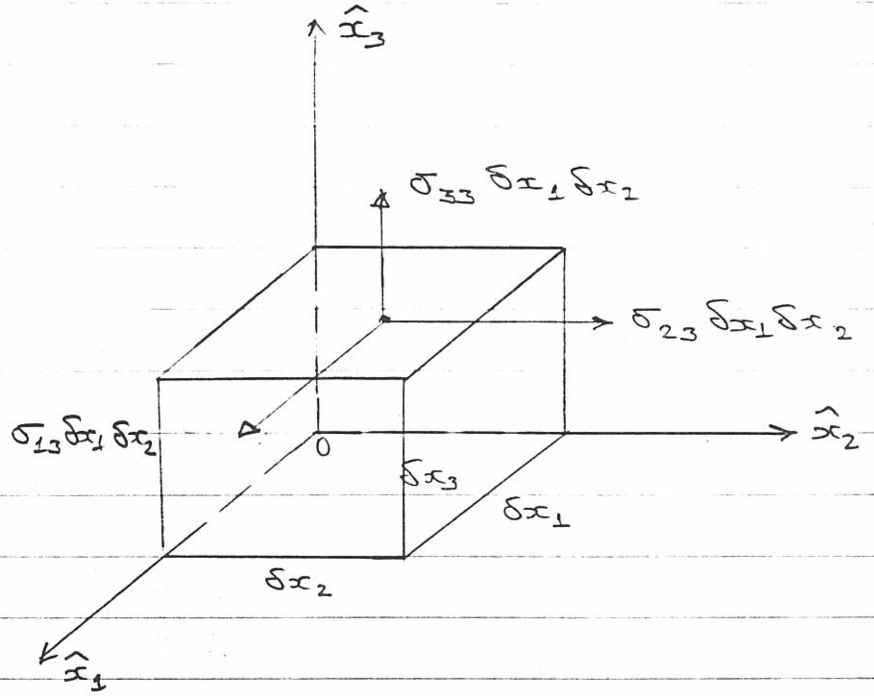
Η ποσότητα

$$\underset{\approx}{\sigma} = \{\sigma_{ij}(\vec{x}, t)\}_{1 \le i, j \le 3}$$

είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του συστήματος αναφοράς και αποτελεί τανυστή δευτέρας τάξεως ο οποίος καλείται τανυστής τάσεων του ρευστού στη θέση $\vec{x}$, τη χρονική στιγμή t. Η (i,j)-συνιστώσα του τανυστή αυτού είναι η i-συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφανείας που ασκείται σε ένα στοιχείο επιφάνειας κάθετο στη διεύθυνση j. (ΣΧΗΜΑ 5).

Οι εννέα συνιστώσες του τανυστή τάσεων $\underset{\approx}{\sigma}$ δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με εφαρμογή του νόμου Νεύτωνα γιά την γωνιακή κίνηση του ρευστού στο τετράεδρο δV μπορούμε να αποδείξουμε όμοια ότι ο τανυστής $\underset{\approx}{\sigma}$ είναι συμμετρικός, δηλ.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3 \qquad (7)$$



ΣΧΗΜΑ 5

(Ασκηση: Να συμπληρωθούν οι δυνάμεις στις υπόλοιπες έδρες του στοιχείου ρευστού).

και συνεπώς έχει μόνο έξι ανεξάρτητες συνιστώσες. (Ασκηση: Να γίνουν οι σχετικοί υπολογισμοί).

1.2.4. Ο ταννυστής των τάσεων σε ήρεμο ρευστό

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε κατά την προσπάθειά μας να ορίσουμε τι είναι ρευστό, ένα ρευστό αδυνατεί να αντισταθεί σε παραμόρφωση άνευ μεταβολής όγκου. Το γεγονός αυτό έχει μία πολύ σημαντική επίπτωση στη μορφή του ταννυστή τάσεων γιά το ρευστό. Γιά να καταλάβουμε τι ακριβώς συμβαίνει, θεωρούμε τις επιφανειακές δυνάμεις πάνω στο ρευστό που βρίσκεται μέσα σε μιά πολύ μικρή σφαίρα ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σ_{ij} είναι κατά προσέγγιση ομοιόμορφα πάνω στην επι-

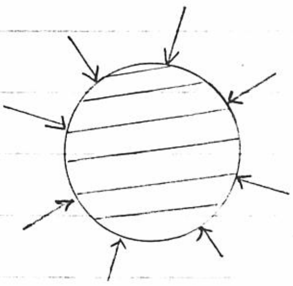
σταθ.

φάνεια της σφαίρας. Επιλέγουμε ένα τοπικό σύστημα αξόνων που συμπίπτει με τους <u>κύριους άξονες</u> του $\underset{\sim}{\sigma}$ και στο νέο σύστημα γράφουμε τον διαγωνοποιημένο τανυστή $\underset{\sim}{\sigma}'$ ως εξής:

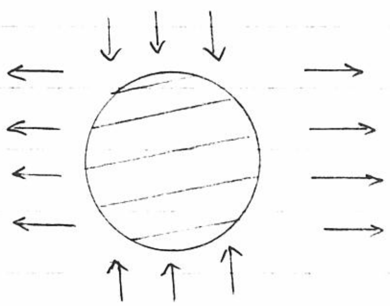
$$\underset{\sim}{\sigma}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sigma'_{ii} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{ισότροπος τανυστής τάσεων} \\ \text{(έχει σφαιρική συμμετρία)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma'_{11}-\frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22}-\frac{1}{3}\sigma'_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33}-\frac{1}{3}\sigma'_{ii} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{αποκλίνων τανυστής} \\ \text{τάσεων (ίχνος = 0)}}}$$

$$\left(\sigma'_{ii} = \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}\right).$$

Οι δύο παραπάνω τανυστές αντιστοιχούν με τις εικονιζόμενες δυνάμεις στην επιφάνεια της σφαίρας



$$\left(\frac{1}{3}\sigma'_{ii}\vec{n}\right)$$



$$\begin{pmatrix} (\sigma'_{11} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii})n'_1 \\ (\sigma'_{22} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii})n'_2 \\ (\sigma'_{33} - \frac{1}{3}\sigma'_{ii})n'_3 \end{pmatrix}$$

(n'_1, n'_2, n'_3 = συνιστώσες του $\vec{n}$ στους κύριους άξονες)

Το δεύτερο σύστημα των επιφανειακών δυνάμεων τείνει να παραμορφώσει τη σφαίρα σε ελλειψοειδές, χωρίς κατ' ανάγκη να έχουμε μεταβολή όγκου, και επί πλέον αυτό το σύστημα δυνάμεων δεν μπορεί να ισορροπηθεί από πεδιακές δυνάμεις στο ρευστό διότι αυτές είναι μικρότερης τάξης μεγέθους από τις επιφανειακές. Συνεπώς για να έχουμε ηρεμία του ρευστού πρέπει

$(\Delta R)^3$ $(\Delta R)^2$

$$\boxed{\sigma'_{11} = \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = \frac{1}{3}\sigma_{ii}} \qquad (8)$$

Συνήθως τα ρευστά βρίσκονται σε κατάσταση συμπίεσης (και όχι εφελκυσμού), οπότε θέτομε

$$\sigma'_{ij} = -p\,\delta_{ij} \quad (p>0) \text{ θλίψη} \qquad (9)$$

όπου

$$\boxed{p = -\frac{1}{3}\sigma'_{ii}} \qquad (10)$$

είναι η στατική πίεση του ρευστού (συνάρτηση της θέσης $\vec{x}$ του κέντρου της θεωρηθείσας σφαίρας).

Συνεπώς η ανά μονάδα επιφάνειας δύναμη που ασκεί ήρεμο ρευστό είναι $-p\vec{n}$, $\vec{n}$ = το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της θεωρούμενης επιφάνειας.

1.2.5. Μηχανική ισορροπία ρευστού

$\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$
$\Sigma\vec{M}_i = \vec{0}$

Ένα απόλυτα στερεό σώμα βρίσκεται σε ισορροπία (ακινητεί) εάν η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή πάνω σ' αυτό είναι μηδέν. Οι συνθήκες όμως ισορροπίας ενός ρευστού είναι πιο πολύπλοκες διότι διαφορετικά στοιχεία του ρευστού μπορούν να κινούνται το ένα σχετικά με το άλλο και μπορούν ξεχωριστά να βρίσκονται σε ισορροπία.

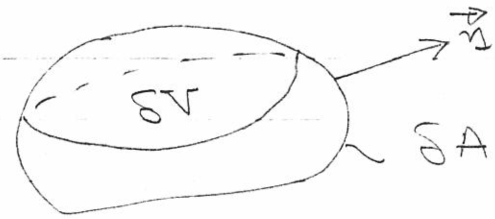
Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στοιχείο ρευστού είναι είτε <u>πεδιακές</u> δυνάμεις είτε <u>επιφανειακές</u> δυνάμεις στα σύνορα του στοιχείου. <u>Αυτές οι δυνάμεις πρέπει να έχουν μηδενική συνισταμένη</u> <u>για να βρίσκεται το στοιχείο ρευστού σε ισορροπία.</u> Η συνολική πεδιακή δύναμη στον όγκο δV του στοιχείου του ρευστού είναι

$$\int_{\delta V} \rho(\vec{x},t)\,\vec{b}(\vec{x},t)\,dV$$

και η συνολική επιφανειακή δύναμη

$$-\int_{\delta A} p(\vec{x},t)\,\vec{n}(\vec{x})\,dA\,.$$

όπου δA είναι το σύνορο του όγκου δV (ΣΧΗΜΑ 6).



<u>ΣΧΗΜΑ 6</u>

Η εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων είναι

$$\int_{\delta V} \rho\vec{b}\,dV = +\int_{\delta A} p\,\vec{n}\,dA = \tag{11a}$$

(Θεώρημα απόκλισης)

$$= +\int_{\delta V} \nabla p\,dV \tag{11b}$$

οπότε

$$\int_{\delta V} (\rho \vec{b} - \nabla p)\, dV = 0. \qquad (12)$$

Επειδή ο όγκος δV είναι αυθαίρετος, υποθέτοντας συνέχεια της ολοκληρωτέας ποσότητας (ως προς $\vec{x}$), παίρνομε:

$$\rho \vec{b} = \nabla p \quad \text{"παντού στο ρευστό".} \qquad (13)$$

Η εξίσωση (13) είναι αναγκαία συνθήκη γιά την ισορροπία του ρευστού.

Εάν η εξίσωση (12) ισχύει γιά οποιοδήποτε όγκο δV, η συνολική δύναμη σε κάθε στοιχείο ρευστού είναι μηδέν. Επιπλέον η συνολική ροπή σε κάθε στοιχείο ρευστού είναι μηδέν γιατί ο τανυστής τάσεων είναι συμμετρικός. Συνεπώς όταν ισχύει η (13) η συνολική ροπή στον οποιοδήποτε όγκο δV είναι μηδέν. Συνεπώς η (13) είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη γιά την ισορροπία του ρευστού.

Εάν περαιτέρω υποθέσουμε ότι οι μαζικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, δηλ.

$$\vec{b} = -\nabla \Psi, \qquad (14)$$

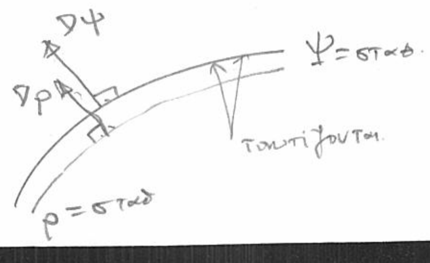
όπου Ψ είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας στο πεδίο των δυνάμεων αυτών, από την (13) παίρνομε

$$-\rho \nabla \Psi = \nabla p \qquad (15)$$

$-\nabla \rho \times \nabla \psi - \rho \underbrace{\nabla \times (\nabla \psi)}_{0} = \underbrace{\nabla \times (\nabla p)}_{0}$

η, εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη τον τελεστή $(\nabla \times \cdot)$

$$(\nabla \rho) \times (\nabla \Psi) = 0. \qquad (16)$$



προβάλλουμε πάνω σε μιά διεύθυνση $\vec{n}_0 = \frac{\nabla p}{|\nabla p|}$

$-\rho\, d\Psi = dP$

Η εξίσωση (16) λέει ότι οι σταθμικές επιφάνειες πυκνότητος και δυναμικού ταυτίζονται, και είναι ταυτόχρονα σταθμικές επιφάνειες της πίεσης (διότι $\nabla p \parallel \nabla \Psi$), και μπορούμε να γράψομε

$$dp/d\Psi = -\rho(\Psi) \qquad (17)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η πυκνότητα είναι ομοιόμορφη, η εξίσωση (17) έχει την απλή λύση

σταθερή

$$p = p_0 - \rho \Psi \qquad (18)$$

όπου p_0 = σταθερά ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 1: Κατανομή πίεσης σε ήρεμο ρευστό μέσα στο πεδίο βαρύτητος

Υπάρχουν δύο ακραίες περιπτώσεις:

(i) Η μάζα του ρευστού είναι πολύ μεγάλη και μεμονωμένη και ένα τμήμα του ρευστού ασκεί βαρυτική έλξη σε κάποιο άλλο τμήμα (self-gravitation),

$$\vec{b} = -\nabla \Psi$$

όπου

δυναμικό βαρύτητας: $$\Delta \Psi = 4\pi G \rho \qquad G = \text{σταθερά} \qquad (19)$$

$$\Delta = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} + \partial^2_{x_3}$$

Από την (19) έχομε

$$\Delta \Psi = \nabla(\underbrace{\nabla \Psi}_{= -\frac{1}{\rho}\nabla p}) = 4\pi G \rho$$

η οποία λόγω της (15) γράφεται

$$\nabla\cdot\left(\boxed{\frac{\nabla p}{\rho}}\right) = -4\pi G\rho \qquad (20)$$

Από την (20) είναι εμφανές ότι πράγματι οι σταθμικές επιφάνειες πίεσης και πυκνότητας συμπίπτουν. Όμως ο καθορισμός των καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων όπου οι σταθμικές καμπύλες του ρ ταυτίζονται με τις παραμετρικές επιφάνειες είναι δύσκολος. Ωστόσο φαίνεται ότι οι μόνες δυνατότητες είναι τα p, ρ να εξαρτώνται μόνο από (α) μία συντεταγμένη καρτεσιανού συστήματος (β) την ακτινική συνιστώσα συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων (γ) την ακτινική συνιστώσα συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων.

Στην περίπτωση (γ) η (20) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G r^2 \rho \qquad (21)$$

Εάν υποθέσουμε ότι

$$p = A\cdot\rho^{1+1/\lambda} \quad (\lambda \geq 0) \qquad (22)$$

η εξίσωση (21) ολοκληρώνεται αριθμητικά για κάθε λ, και κλειστά για, π.χ.,

$\lambda = 0$ (ρευστό ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_0)

$$p = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 (a^2 - r^2) \qquad (r \leq a)$$

$\lambda = 5$

$$p = \frac{27\, a^3 A^{5/2}}{(2\pi G)^{3/2}(a^2+r^2)^3} \qquad (r \geq 0)$$

(a = σταθερά ολοκλήρωσης).

(ii) Η μάζα του ρευστού καταλαμβάνει περιορισμένο όγκο και το βαρυτικό πεδίο είναι ομοιόμορφο σ' όλη την έκταση του ρευστού, δηλ.

$$\vec{b} = \vec{g} \ (=\text{σταθ.}), \quad \Psi = -\vec{g}\cdot\vec{x} \tag{23}$$

οπότε η (15) παίρνει τη μορφή

$$\nabla p = \rho \vec{g}. \tag{24}$$

Από τις (24) και (23) συνάγεται ότι οι σταθμικές επιφάνειες των p, ρ, Ψ είναι επίπεδα κάθετα στο $\vec{g}$. Εάν επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς έτσι ώστε

$$\vec{g}\cdot\vec{x} = -g x_3$$

η (24) γράφεται

$$dp/dz = -g\rho(z). \qquad z \equiv x_3 \tag{25}$$

Αν η πυκνότητα είναι ομοιόμορφη, η (25) έχει την απλή λύση

$$p = p_0 - \rho g z, \tag{26}$$

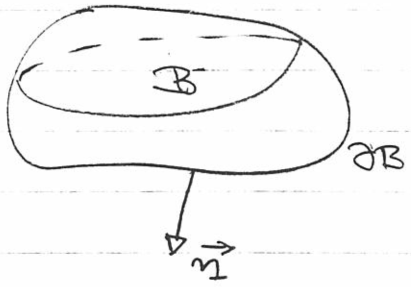
p_0 = σταθ. ολοκλήρωσης = πίεση στο επίπεδο $z=0$.

Αν η πυκνότητα δίνεται από το νόμο: $p = \rho g H$ συναρτήσει της πίεσης (μοντέλο γήινης ατμόσφαιρας, H = απόσταση από την επιφάνεια της γης), η λύση της (25) είναι

$$p = p_0 e^{-z/H}, \tag{27}$$

p_0 = σταθ. ολοκλήρωσης = πίεση στο έδαφος.

Παράδειγμα 2: Στερεό σώμα μέσα σε ήρεμο ρευστό



όγκος $B = V$

ΣΧΗΜΑ 7

Η επιφανειακή δύναμη που ασκείται από το ρευστό πάνω στο σώμα B λόγω πίεσης είναι

$$-\int_{\partial B} p\,\vec{n}\,dA \left(\overset{?}{=} -\int_{B} \nabla p\, dV\right) \qquad (28)$$

$$\int \rho \nabla \Psi dV$$

Η πίεση p ορίζεται από την εξίσωση (15). Θα εκφράσουμε τη δύναμη αυτή συναρτήσει του όγκου του ρευστού τον οποίο "καταλαμβάνει" (εκτοπίζει) το στερεό σώμα. Ουσιαστικά, πρέπει να υπολογίσουμε πόσος όγκος ρευστού μπορεί να "αντικαταστήσει τη θέση του σώματος" χωρίς να διαταραχθεί η ισορροπία του ρευστού.

Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί εάν $\vec{b} = -\nabla\Psi$ και Ψ είναι μία δεδομένη συνάρτηση του χώρου. Οι σταθμικές επιφάνειες της Ψ μπορούν να επεκταθούν μέσα στο σώμα, και η ομοιόμορφη τιμή την οποία η πυκνότητα πρέπει να έχει σε κάθε σταθμική επιφάνεια ώστε το ρευστό να ισορροπεί στο χώρο που καταλαμβάνει το σώμα, είναι ίση με την πυκνότητα ρ πάνω στην ίδια σταθμική επιφάνεια εκτός του σώματος. Κατά τον τρόπο αυτό καθορίζουμε την πυκνότητα του ρευστού που μπορεί να αντικαταστήσει το σώμα. Η συνισταμένη μαζική δύναμη στον όγκο αυτό του ρευστού είναι

$$-\int_B \rho \nabla \Psi \, dV \qquad (29)$$

Συνεπώς, η "ανωστική δύναμη" πάνω στο στερεό σώμα είναι ίση με τη συνισταμένη μαζική δύναμη στο ~~αυτο~~ πιεζόμενο ρευστό.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

2. Οι αρχές διατήρησης μάζας, ορμής, ενέργειας και οι εξισώσεις κίνησης ιδανικού ρευστού

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

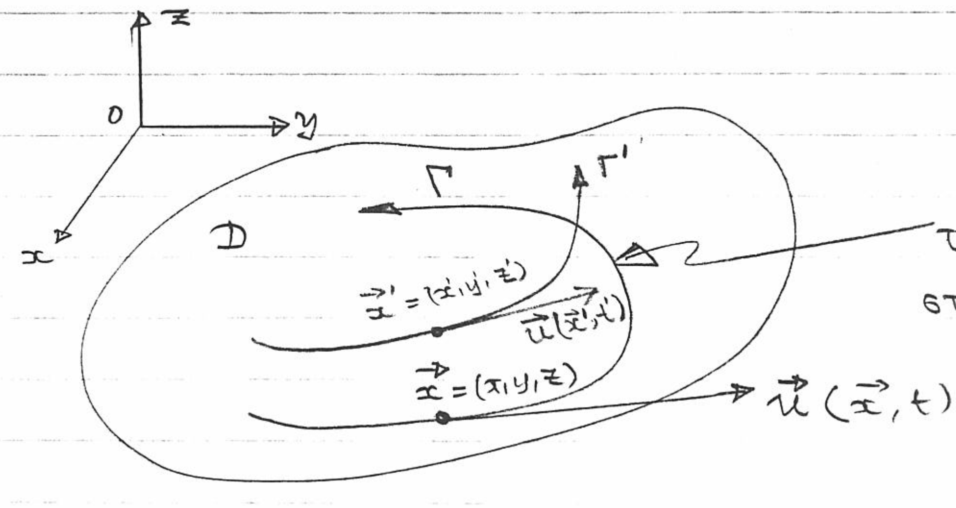
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 95

Γ. Ν. Μακράκης

Στο κεφάλαιο αυτό θα παράγουμε τις εξισώσεις κίνησης των ρευστών, από τα βασικά θεωρήματα διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας της κλασσικής μηχανικής. Κατ' αρχήν θα υποθέσουμε ότι το ρευστό είναι ιδανικό (ατελικές). Οι εξισώσεις κίνησης ενός τέτοιου ρευστού είναι γνωστές σαν εξισώσεις Euler.

2.1. Οι εξισώσεις Euler

Εστω ότι το ρευστό μας καταλαμβάνει το χωρίο $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3). Εάν $\vec{x}$ είναι ένα σημείο στο D (ΣΧΗΜΑ 1), θεωρούμε εκείνο το στοιχείο ρευστού το οποίο βρίσκεται στη θέση $\vec{x}$ κατά τη χρονική στιγμή t, (και κινείται κατά μήκος της τροχιάς Γ).



ΣΧΗΜΑ 1

Εστω $\vec{u}(\vec{x}, t)$ η ταχύτητα του στοιχείου αυτού. Για δεδομένο χρόνο t, το $\vec{u}(\cdot, t)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο επί του D, και καλείται (χωρικό) πεδίο ταχύτητας του ρευστού.

Έστω $\rho(\vec{x},t)$ η πυκνότητα του ρευστού στο D τη χρονική στιγμή t. Εάν W είναι ένα οποιοδήποτε υποχωρίο του D, η μάζα του ρευστού στο W τη χρονική στιγμή t είναι

$$m(W,t) = \int_W \rho(\vec{x},t)\,dV ,$$

όπου dV είναι το στοιχείο όγκου (στο επίπεδο ή το χώρο).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\vec{u}$ και ρ (αλλά και άλλες οι οποίες θα εισαχθούν στη συνέχεια) είναι επαρκώς ομαλές ώστε οι τοπικοί χειρισμοί να έχουν νόημα. Η υπόθεση αυτή απαιτεί ασφαλώς έλεγχο και τούτο θα γίνει εν καιρώ υστέρων. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα ρ (ακριβέστερα η "τοπική" της τιμή) ορίζεται λόγω ότι δουλεύουμε κάτω από την υπόθεση του συνεχούς μέσου.

Η κατασκευή των εξισώσεων κίνησης βασίζεται στην ακόλουθη τρεις βασικές αρχές της κλασσικής μηχανικής:

(i) Η συνολική μάζα ενός κλειστού συστήματος είναι σταθερή (δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται).

(ii) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι ίσος με την εφαρμοζόμενη δύναμη (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα).

(iii) Η συνολική ενέργεια ενός κλειστού συστήματος είναι σταθερή (δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται).

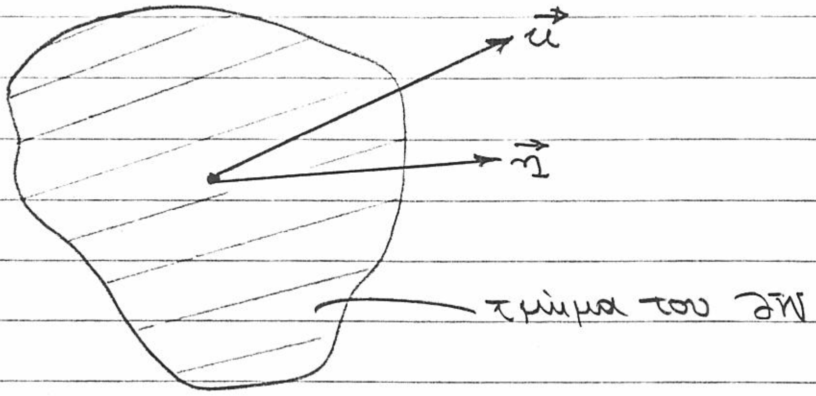
2.1.1. Διατήρηση μάζας

Η μεταβολή της μάζας στο D είναι

$$\frac{d}{dt} m(W,t) = \frac{d}{dt}\int_W \rho(\vec{x},t)\,dV = \int_W \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t)\,dV$$

ανεξάρτητο του χρόνου

εάν υποθέσουμε ότι το χωρίο W δεν μεταβάλλεται με το χρόνο.
Εστω ∂W το σύνορο του W, το οποίο υποθέτουμε λείο, και $\vec{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο επί του ∂W, dA το στοιχείο επιφάνειας του ∂W. Η ροή όγκου μέσω του ∂W ανά μονάδα όγκου είναι $\vec{u}\cdot\vec{n}$, και η ροή μάζας $\rho\vec{u}\cdot\vec{n}$ (ΣΧΗΜΑ 2).



ΣΧΗΜΑ 2

Η αρχή διατήρησης της μάζας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Ο ρυθμός αύξησης της μάζας στο W είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο η μάζα εισρέει στο W μέσω του ∂W, δηλ.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_W \rho\, dV = -\int_{\partial W} \rho\vec{u}\cdot\vec{n}\, dA} \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) είναι η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της απόκλισης, η (1) γράφεται στη μορφή

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u})\right] dV = 0 \qquad (2)$$

Επειδή το χωρίο W είναι αυθαίρετο υποχωρίο του D, η (2) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας (εξίσωση συνέχειας)

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad , \quad (\vec{x},t) \in D} . \qquad (3)$$

Εάν η ομαλότητα των συναρτήσεων $\vec{u}$ και ρ δεν είναι επαρκής ώστε να εφαρμοσθεί το θεώρημα απόκλισης, χρησιμοποιείται συστηματικά η ολοκληρωτική μορφή (1).

2.1.2. Διατήρηση της ορμής

Εάν $\vec{x}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ είναι η τροχιά Γ ενός στοιχείου ρευστού (ΣΧΗΜΑ 1), η ταχύτητά του είναι

$$\vec{u}\,(x(t),y(t),z(t),t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right)$$

δηλ.

$$\vec{u}\,(\vec{x}(t),t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} . \qquad (4)$$

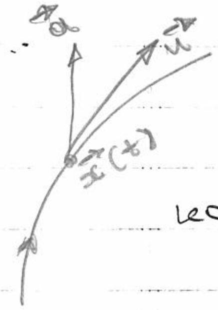
Οι παραπάνω υπολογισμοί και όλοι όσοι θα ακολουθήσουν γίνονται σε καρτεσιανές χωρικές συντεταγμένες. Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όταν χρησιμοποιούνται άλλες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Τούτο μπορεί να γίνει είτε γράφοντας όλες τις εξισώσεις κατά τρόπο αναλλοίωτο (ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων), είτε γράφοντάς τις σε καρτεσιανές συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας κατόπιν κατάλληλους μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Η επιτάχυνση του στοιχείου του ρευστού είναι

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{u}\,(x(t),y(t),z(t),t)}{dt} . \qquad (5)$$

$\vec{u}=\vec{u}(\vec{x}(t),t)$ $\qquad \vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\partial_t\vec{u}+\partial_x\vec{u}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u}+\partial_y\vec{u}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v}+\partial_z\vec{u}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w}$

Εισάγοντας το συμβολισμό $\qquad (u\partial_x+v\partial_y+w\partial_z)\vec{u}$



$$\vec{u}_x=\partial_x\vec{u}, \quad \vec{u}_t=\partial_t\vec{u}, \quad \text{κ.λ.π.}$$

και

$$\vec{u}(x,y,z,t)=\big(u(x,y,z,t),\, v(x,y,z,t),\, w(x,y,z,t)\big)$$

έχομε (γιατί;)

$$\vec{a}(t)= u\vec{u}_x+v\vec{u}_y+w\vec{u}_z+\vec{u}_t \qquad (6a)$$

$$=\partial_t\vec{u}+(\underbrace{\vec{u}\cdot\nabla}_{(u\partial_x+v\partial_y+w\partial_z)})\vec{u}, \qquad (6b)$$

όπου

$$\partial_t\vec{u}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

και

$$\vec{u}\cdot\nabla = u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z},$$

Η ποσότητα

$$\frac{D}{Dt}=\partial_t+\vec{u}\cdot\nabla \qquad (7)$$

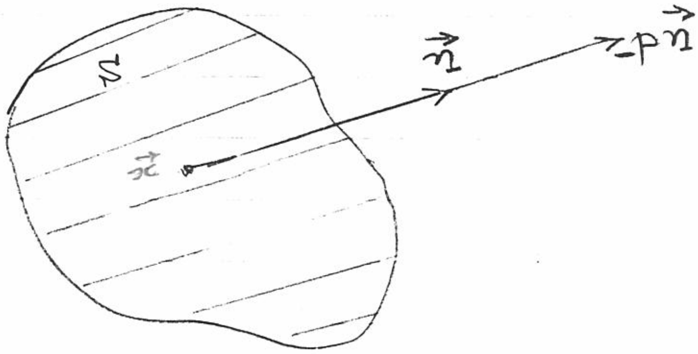
καλείται υλική παράγωγος, και λαμβάνει ταυτόχρονα υπ' όψιν την μεταβολή του χρόνου αυτού καθ' εαυτού, αλλά και την αλλαγή της θέσης των στοιχείων του ρευστού συναρτήσει του χρόνου. Πράγματι, εάν $f(x,y,z,t)$ είναι μία οποιαδήποτε (βαθμωτή ή διανυσματική) συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, με τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης έχομε υλική παράγωγος (material derivative)

$$\frac{d}{dt} f(x,y,z,t) = \partial_t f + (\vec{u}\cdot\nabla) f =: \frac{Df}{Dt}(x(t),y(t),z(t),t).$$

Η χρήση της παραγώγου αυτής είναι αναγκαστική συνέπεια του τρόπου περιγραφής της κίνησης του ρευστού, τον οποίο επιλέξαμε. Ουσιαστικά, ενδιαφερόμαστε για την μεταβολή της ταχύτητας εκείνου του στοιχείου ρευστού που κατέχει τη θέση $(x(t), y(t), z(t))$ κατά τη χρονική στιγμή t (περιγραφή κατά Euler). Η περιγραφή αυτή είναι βολική για τη μελέτη της κίνησης των ρευστών, σε αντίθεση με την κλασική περιγραφή κατά Lagrange όπου μελετάμε την κίνηση κάθε στοιχείου του ρευστού ξεχωριστά με βάση την αρχική του θέση και ταχύτητα και τις δυνάμεις επ' αυτού (ως υλικού σημείου).

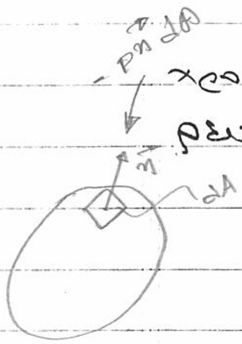
Σύμφωνα με τα όσα αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, σε κάθε κίνηση ιδεατού (ατριβούς ρευστού) αντιστοιχεί μια συνάρτηση $p(\vec{x},t)$, η πίεση, τέτοια ώστε, εάν S είναι ένα στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας μέσα στο ρευστό με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$, η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας (τάση) διά της S στο $\vec{x}$, τη χρονική στιγμή t, να είναι $p(\vec{x},t)\vec{n}$ (ΣΧΗΜΑ 3), δηλ.

$$(\text{δύναμη διά της } S \text{, ανά μονάδα επιφανείας}) = -p(\vec{x},t)\vec{n}$$



ΣΧΗΜΑ 3

N.B. Δεδομένου ότι το ρευστό είναι ιδανικό (ακριβές) δεν αναπτύσσονται εφαπτομενικές δυνάμεις πάνω στην S. Διαισθητικά, η απουσία εφαπτομενικών δυνάμεων αποκλείει την έναρξη περιστροφής στο ρευστό (ή το σταμάτημα ήδη υπάρχουσας). Τούτο υποδηλώνει μία από τις φυσικές αδυναμίες του μοντέλου του ιδεατού ρευστού (π.χ. υπάρχει περιστροφή του πραγματικού ρευστού σ' ένα τυφώνα, ή πίσω από την έλικα ενός πλοίου).



Εάν W είναι ξανά ένα υποχωρίο του ρευστού D, σε μιά χρονική στιγμή t, η συνολική δύναμη που ασκείται στο ρευστό μέσα στο W από τη τάση στο σύνορο ∂W είναι

$$\vec{S}_{\partial W} = \text{δύναμη στο } W = -\int_{\partial W} p\,\vec{n}\,dA \qquad (8)$$

(το αρνητικό πρόσημο διότι το $\vec{n}$ έχει φορά προς το εξωτερικό του W). Εάν $\vec{e}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα στο χώρο, από το θεώρημα απόκλισης έχομε

$$\vec{e}\cdot\vec{S}_{\partial W} = -\int_{\partial W} p\,\vec{e}\cdot\vec{n}\,dA = -\int_{W} \operatorname{div}(p\,\vec{e})\,dV =$$

$$= -\int_{W} \nabla p\cdot\vec{e}\,dV, \qquad (9)$$

οπότε

$$\vec{S}_{\partial W} = -\int_{W} \nabla p\,dV. \qquad (10)$$

Εάν επιπλέον $\vec{b}(\vec{x},t)$ είναι η πυκνότητα των μαζικών δυνάμεων (δύναμη ανά μονάδα μάζας), η συνισταμένη μαζική δύναμη είναι

$$\vec{B}_W = \int_W \rho \vec{b}\, dV. \tag{11}$$

Συνεπώς, η συνολική δύναμη πάνω στο ρευστό εντός του όγκου W είναι

$$\vec{S}_{\partial W} + \vec{B}_W = \int_W (\rho\vec{b} - \nabla p)\, dV. \tag{12}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (δύναμη = μάζα × επιτάχυνση) έχομε

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$\int_W \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV = \vec{S}_{\partial W} + \vec{B}_W = \int_W (\rho\vec{b} - \nabla p)\, dV, \tag{13}$$

και επειδή το χωρίο W είναι αυθαίρετο, παίρνουμε την ακόλουθη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{b}} \tag{14}$$

Στη συνέχεια θα παράγουμε την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής τόσο από τη διαφορική μορφή (14), όσο και από βασικές αρχές. Από την (14) έχομε

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\rho (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - \nabla p + \vec{b} \tag{15}$$

και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (3) παίρνουμε

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) = -\mathrm{div}(\rho\vec{u})\vec{u} - \rho(\vec{u}\nabla)\vec{u} - \nabla p + \vec{b}. \qquad (16)$$

Εάν $\vec{e}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα στο χώρο, από την (16) έχομε

$$\vec{e}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) = -\mathrm{div}(\rho\vec{u})\vec{u}\cdot\vec{e} - \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\cdot\vec{e} - (\nabla p)\vec{e} + \rho\vec{b}\cdot\vec{e}$$

$$= -\mathrm{div}\big(p\vec{e} + \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{e})\big) + \rho\vec{b}\cdot\vec{e}. \qquad (17)$$

Επομένως, εάν W είναι ένα σταθερό χωρίο (ανεξάρτητο του χρόνου), ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στο W στην κατεύθυνση $\vec{e}$ είναι

$$\vec{e}\cdot\frac{d}{dt}\int_W \rho\vec{u}\,dV = \underbrace{-\int_{\partial W}\big(p\vec{e} + \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{e})\big)\vec{n}\,dA}_{\text{(με εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης)}} + \int_W \rho\vec{b}\cdot\vec{e}\,dV. \qquad (18)$$

Από την (18) παίρνουμε την ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_W \rho\vec{u}\,dV = -\int_{\partial W}\big(p\vec{n} + \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})\big)\,dA + \int_W \rho\vec{b}\,dW} \qquad (19)$$

Η ποσότητα

$$p\vec{n} + \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) \qquad (20)$$

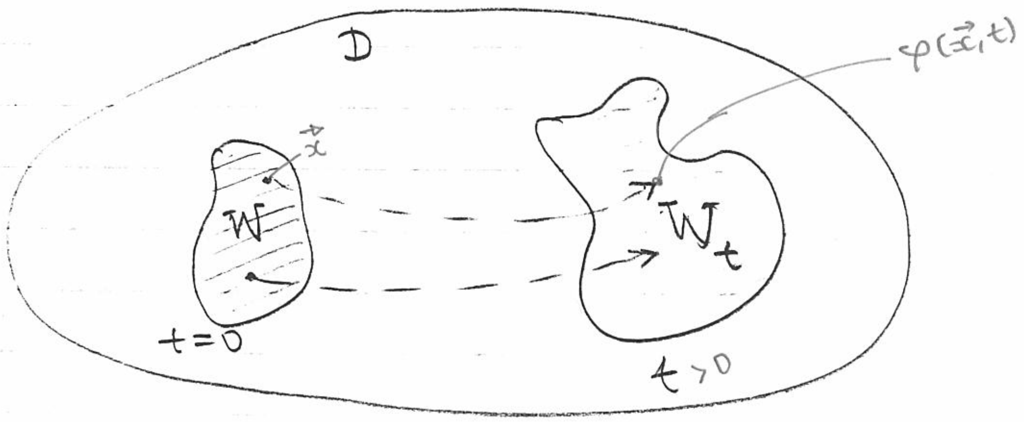
είναι η <u>ροή ορμής ανά μονάδα επιφάνειας</u> διά της ∂W.

Η παραπάνω διαδικασία για την παραγωγή του ολοκληρωτικού νόμου (19) βασίστηκε στη διαφορική μορφή. Έχοντας κατά νου να υποθέσουμε την ελάχιστη δυνατή ομαλότητα των εμπλεκομένων συναρτήσεων, είναι χρήσιμο να παράγουμε τον ολοκληρωτικό νόμο από τις βασικές αρχές και να περάσουμε κατόπιν στη διαφορική μορφή, όπως κάναμε και με την εξίσωση συνέχειας.

Έστω $\vec{x} \in D$, όπου D είναι η περιοχή που κατέχει το ρευστό, και έστω $\varphi(\vec{x},t)$ η τροχιά του στοιχείου ρευστού που βρίσκεται στη θέση $\vec{x}$ τη χρονική στιγμή $t=0$. Θα υποθέσουμε ότι η φ είναι επαρκώς ομαλή και ότι για δοθέν t είναι αντιστρέψιμη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varphi_t : \vec{x} \longmapsto \varphi(\vec{x},t) \qquad (t = \text{σταθερό})$$

από τη θέση ενός στοιχείου ρευστού τη στιγμή $t=0$ στη θέση του τη στιγμή t (απεικόνιση ροής). Εάν W είναι ένα υποχωρίο του D, τότε $\varphi_t(W) = W_t$ είναι ο όγκος W μετακινούμενος με το ρευστό (Σχήμα 4).



ΣΧΗΜΑ 4

Η "αρχέτυπη" ολοκληρωτική μορφή της διατήρησης της ορμής είναι

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\vec{u}\, dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho\vec{b}\, dV} \qquad (21)$$

$$\left(\begin{matrix}\text{ρυθμός μεταβολής}\\ \text{της ορμής στο}\\ \text{χωρίο } W_t\end{matrix} = \begin{matrix}\text{επιφανειακή δύναμη}\\ \text{στο σύνορο } \partial W_t\\ \text{του } W_t\end{matrix} + \begin{matrix}\text{μαζική δύναμη}\\ \text{στο } W_t\end{matrix}\right).$$

Οι μορφές (13) και (21) είναι ισοδύναμες. Τούτο αποδεικνύεται εύκολα με αλλαγή μεταβλητής (χρήση της απεικόνισης ροής) στο πρώτο ολοκλήρωμα της (21) που γράφεται

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\vec{u}\, dV \underset{\text{μεταβλητής}}{\xrightarrow{\text{αλλαγή}}} = \frac{d}{dt}\int_{W} (\rho\vec{u})(\varphi(\vec{x},t),t)\, J(\vec{x},t)\, dV \qquad (22)$$

$\parallel$ (pass the derivative under the integral)

$$\int_W \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u})\cdot J + \rho\vec{u}\,\boxed{\frac{\partial J}{\partial t}}\right) dV$$

όπου $J(\vec{x},t)$ είναι η Ιακωβιανή της απεικόνισης φ_t. Επειδή το χωρίο W είναι σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου) μπορούμε να μεταφέρουμε τη χρονική διαφόριση κάτω από το ολοκλήρωμα. Στο σημείο αυτό πρέπει να θυμόμαστε ότι

ρυθμός μεταβολής του $\rho\vec{u}$ στην περιγραφή Euler

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u})(\varphi(\vec{x},t),t) = \left(\frac{D}{Dt}(\rho\vec{u})\right)(\varphi(\vec{x},t),t) \qquad (23)$$

είναι η υλική (χρονική) παράγωγος (≡ χρονική παραγώγιση "ακολουθώντας" το ρευστό)(γιατί;).

Το ακόλουθο λήμμα μας λέει πως να υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο της Ιακωβιανής $J(\vec{x},t)$.

Λήμμα:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\vec{x},t) = J(\vec{x},t)\left[div\left(\vec{u}(\varphi(\vec{x},t),t)\right)\right]. \qquad (24)$$

Απόδειξη: Εστω $(\xi(\vec{x},t), \eta(\vec{x},t), \zeta(\vec{x},t))$ οι συντεταγμένες του $\varphi(\vec{x},t)$. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό της ταχύτητας (βλ. ΣΧΗΜΑ 1, σελ. 2.1) και της απεικόνισης ροής (βλ. ΣΧΗΜΑ 4, σελ. 2.4)

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{x},t) = \vec{u}(\varphi(\vec{x},t),t). \qquad (25)$$

Θεωρώντας το διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ σταθερό έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} +$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right)$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (26)$$

Επίσης

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vdots \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Οι συνιστώσες u, v, w της ταχύτητας $\vec{u}$ στην παραπάνω έκφραση είναι συναρτήσεις των x, y, z μέσω του $\varphi(\vec{x}, t)$. Συνεπώς

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\vdots \tag{28}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Αντικαθιστώντας τις (27) και (28) στην (26) παίρνομε

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) J = (\mathrm{div}\,\vec{u}) J. \quad \blacksquare$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα και την (23) στην (22), παίρνομε

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\vec{u}\, dV = \int_{W}\left\{\left(\frac{D}{Dt}\rho\vec{u}\right)(\varphi(\vec{x},t),t) + (\mathrm{div}\,\vec{u})(\rho\vec{u})(\varphi(\vec{x},t),t)\right\}\cdot$$

$$\cdot J(\vec{x},t)\, dV = \int_{W_t}\left\{\frac{D}{Dt}(\rho\vec{u}) + (\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u})\vec{u}\right\} dV. \tag{29}$$

Από την εξίσωση συνέχειας έχομε

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = 0 \tag{30}$$

οπότε η (29) γράφεται (να γίνουν οι πλήρεις υπολογισμοί)

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho \vec{u}\, dV = \int_{W_t} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\, dV. \qquad (31)$$

Κατ' αναλογία έχομε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα μεταφοράς: Γιά κάθε συνάρτηση $f(\vec{x},t)$

cf. Hughes & Marsden

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f\, dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt}\, dV} \qquad (32)$$

και

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{W_t} f\, dV = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\vec{u})\right) dV} \qquad (33)$$

Επειδή τα χωρία W και W_t είναι αυθαίρετα, αν υποθέσουμε ότι οι ολοκληρωτέες ποσότητες είναι συνεχείς, συνάγομε ότι οι μορφές (14), (19) και (21) είναι ανά δύο ισοδύναμες.

Παρατήρηση: Το λήμμα (24) είναι επίσης πολύ σημαντικό γιά την κατανόηση της έννοιας της ασυμπιεστότητας.

Μία ροή θα ονομάζεται ασυμπίεστη εάν γιά κάθε υποχωρίο W του πεδίου ροής D

$$\mathrm{vol}(W_t) = \int_{W_t} dV = \text{ανεξάρτητο του } t.$$

δηλ. $\frac{d}{dt}\int_{W_t} dV = 0$

Συνεπώς η ασυμπιεστότητα είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$\overset{\int_W (\partial_t J) dV}{\scriptstyle{\shortparallel}}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{W_t} dV = \frac{d}{dt}\int_{W} J\,dV = \int_{W} (\operatorname{div}\vec{u})\,J\,dV =$$

$$= \int_{W_t} (\operatorname{div}\vec{u})\,dV, \qquad (34)$$

για οποιοδήποτε κινούμενο χωρίο W_t, οπότε οι παρακάτω τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) Το ρευστό είναι ασυμπίεστο;} \\ \text{(ii) } \operatorname{div}\vec{u} = 0; \\ \text{(iii) } J \equiv 1. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Από την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \text{ δηλ. } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0$$

και το γεγονός ότι $\rho > 0$, συμπεραίνομε ότι <u>το ρευστό είναι ασυμπίεστο εάν και μόνο εάν</u> $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, δηλ. εάν η πυκνότητα είναι σταθερή "ακολουθώντας" το ρευστό. Ειδικώτερα, εάν το ρευστό είναι <u>ομογενές</u>, δηλ. ρ = ανεξάρτητο των $\vec{x}$, έπεται ότι είναι και ασυμπίεστο εάν και μόνο εάν το ρ δεν εξαρτάται επίσης και από τον χρόνο t.

<u>ανομοιογενή ασυμπίεστα ρευστά</u>: στρωματοποιημένες ροές στην ωκεανογραφία

Εάν τέλος θεωρήσουμε γνωστή την πυκνότητα $\rho(\vec{x},0)$ κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, καθώς και την απεικόνιση ροής $\varphi(\vec{x},t)$ και την Ιακωβιανή αυτής $J(\vec{x},t)$, έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho \, dV = 0$$

δηλ.

$$\int_{W_t} \rho(\vec{x},t)\, dV = \int_{W_0} \rho(\vec{x},0)\, dV,$$

και με αλλαγή μεταβλητής

$$\int_{W_0} \rho(\varphi(\vec{x},t),t)\, J(\vec{x},t)\, dV = \int_{W_0} \rho(\vec{x},0)\, dV.$$

Επειδή το χωρίο W_0 είναι αυθαίρετο παίρνουμε

$$\boxed{\rho(\varphi(\vec{x},t),t)\, J(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},0)} \qquad (36)$$

η οποία είναι μία εναλλακτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας. Μία σημαντική συνέπεια της (36) είναι ότι ένα ρευστό ομογενές τη χρονική στιγμή $t=0$ δεν παραμένει ομογενές, εκτός εάν είναι ασυμπίεστο.
οπότε $J=1$

2.1.3. Διατήρηση της ενέργειας

Μέχρι τώρα έχουμε παράγει δύο από τις τρείς βασικότερες εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των ρευστών

$$\begin{cases} \rho \dfrac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{b} & \text{(διατήρηση ορμής)} \\ \\ \dfrac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \vec{u} = 0 & \text{(διατήρηση μάζας),} \end{cases}$$

δηλ. $(n+1)$-εξισώσεις ($n = 2$ ή 3 ανάλογα με τη διάσταση του χωρίου ροής). Ωστόσο στις εξισώσεις αυτές υπεισέρχονται $(n+2)$-άγνωστες συναρτήσεις: $\vec{u}$, ρ, p. Τούτο σημαίνει ότι χρειαζόμαστε μία ακόμη εξίσωση, και αυτή είναι η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

Η κινητική ενέργεια του ρευστού στο χωρίο W είναι

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\int_W \rho |\vec{u}|^2 \, dV \tag{37}$$

όπου $|\vec{u}| = (u^2+v^2+w^2)^{1/2}$ είναι το μέτρο της ταχύτητας. Η συνολική ενέργεια του ρευστού είναι

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{int}, \tag{38}$$

όπου E_{int} είναι η εσωτερική ενέργειά του. Η ενέργεια αυτή δεν είναι ορατή μακροσκοπικά, αλλά σχετίζεται με τις ενδομοριακές δυνάμεις και ταλαντώσεις των μορίων (είναι δηλαδή η συνεισφορά της μικροσκοπικής δομής στην ενέργεια που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας όταν δουλεύουμε με την υπόθεση του συνεχούς μέσου). Η συνολική ενέργεια στο W μεταβάλλεται είτε όταν "αντλούμε" ενέργεια προς το W από εξωτερικές πηγές είτε όταν το ρευστό παράγει έργο (π.χ. θέρμανση του ρευστού ή κίνηση ενός υδροστροβίλου, αντίστοιχα).

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός κινούμενου τμήματος W_t του ρευστού, βάσει του θεωρήματος μεταφοράς, είναι

Εξ. (32)

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{W_t} \rho |\vec{u}|^2 dV\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{W_t} \rho \frac{D|\vec{u}|^2}{Dt} dV =$$

$$= \int_{W_t} \rho \left(\vec{u}\cdot\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)\right) dV. \qquad (39)$$

Στον παραπάνω υπολογισμό ελήφθη υπ' όψιν ότι

$$\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}|\vec{u}|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2+v^2+w^2\right) + \frac{1}{2}\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2+w^2\right) + \right.$$

$$\left. + v\frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2+w^2\right) + w\frac{\partial}{\partial z}\left(u^2+v^2+w^2\right)\right] =$$

$$= u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial t} + u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) +$$

$$+ \ldots + w\left(\ldots + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \vec{u}\,\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}. \qquad (40)$$

Μία γενική θεώρηση του νόμου διατήρησης της ενέργειας, και ειδικότερα του όρου E_{int}, απαιτεί εκτεταμένη αναφορά στη θερμοδυναμική των ρευστών. Γιά το λόγο αυτό θα περιοριστούμε μόνο σε δύο σημαντικές περιπτώσεις.

(A) Ασυμπίεστη ροή

Υποθέτομε κατ' αρχήν ότι όλη η ενέργεια του ρευστού είναι κινητική ενέργεια, και ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας σ' οποιοδήποτε τμήμα του ρευστού είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου από την πίεση και τις μαζικές δυνάμεις, δηλ.

"αρχέτυπη μορφή διατήρησης κ. Ε."

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = -\int_{\partial W_t} p\vec{u}\cdot\vec{n}\, dA + \int_{W_t} \rho\vec{u}\cdot\vec{b}\, dV. \qquad (41)$$

Από τις (39) και (41) έχουμε

$$\int_{W_t} \rho\left(\vec{u}\cdot\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)\right) dV =$$

(Θεώρημα απόκλισης)

$$= -\int_{W_t} \left(\operatorname{div}(p\vec{u}) - \rho\vec{u}\cdot\vec{b}\right) dV =$$

* (div $\vec{u}$ = 0, ασυμπιεστότητα)

$$= -\int_{W_t} \left(\vec{u}\cdot\nabla p - \rho\vec{u}\cdot\vec{b}\right) dV. \qquad (42)$$

N.B. Η εξίσωση (42) είναι (έμμεση) συνέπεια του νόμου διατήρησης της ορμής (βλ. εξίσωση (14), σελ. 2.8).

! Επομένως, εάν υποθέσομε ότι $E = E_{kin}$, το ρευστό πρέπει να είναι αναγκαστικά ασυμπίεστο (εκτός εάν $p = 0$).

Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής λοιπόν οι εξισώσεις κίνησης (εξισώσεις Euler) είναι

$$(14) \Rightarrow \quad \rho\vec{u}\,\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\left(\vec{u}\cdot\nabla p - \rho\vec{u}\cdot\vec{b}\right)$$

ολοκλήρωση στο W_t

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\nabla p + \rho \vec{b} \\
\frac{D\rho}{Dt} &= 0 \\
\operatorname{div} \vec{u} &= 0
\end{aligned}
\right\} \text{, στο } D.
$$

με κατάλληλες οριακές συνθήκες για την ταχύτητα στο σύνορο ∂D του πεδίου ροής D. Εάν επί παραδείγματι το ∂D είναι στερεό σύνορο: $\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$. (συνθήκη Neumann – μη διαπερατότητος).

(B) Ισεντροπική ροή

ορισμός: Μία ροή καλείται ισεντροπική, εάν υπάρχει συνάρτηση $i(\vec{x},t)$ τέτοια ώστε

$\delta S = 0$

$$\nabla i = \frac{1}{\rho} \nabla p. \qquad (43)$$

$\delta i = T\,dS + \overset{1/\rho}{\upsilon}\,\delta p$

Το μέγεθος i ονομάζεται ενθαλπία, και είναι θερμοδυναμικό μέγεθος. Τα βασικά μεγέθη που υπεισέρχονται στη θερμοδυναμική των ρευστών (και είναι συναρτήσεις της θέσης $\vec{x}$ και του χρόνου t) είναι

p = πίεση
ρ = πυκνότητα
T = θερμοκρασία
S = εντροπία
i = ενθαλπία (ανά μονάδα μάζας)
$e = i - (p/\rho)$ = εσωτερική ενέργεια (ανά μονάδα μάζας)

Τα μεγέθη αυτά συσχετίζονται με τα αξιώματα (νόμους) της Θερμοδυναμικής.

Ο <u>πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής</u> έχει τη μορφή

$$di = T\,ds + \frac{1}{\rho}dp \qquad (44)$$

και είναι μία (εναλλακτική) διατύπωση της διατήρησης της ενέργειας. Μία ισοδύναμη της (44) διατύπωση είναι

ορισμός ε ⇒
$d\varepsilon = di + \frac{p}{\rho^2}d\rho - \frac{1}{\rho}dp$

$$d\varepsilon = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho. \qquad (45)$$

<u>Εάν</u> η πίεση p είναι συνάρτηση της πυκνότητος ρ και μόνο, <u>ΤΟΤΕ</u> η ροή είναι ισεντροπική (εναλλακτικός ορισμός: $ds=0$) και

$p = f(\rho)$
$dp = f'(\rho)\,d\rho$
$\nabla i = \frac{1}{\rho}\nabla p =$
$= \frac{1}{\rho}\nabla f(\rho)$
$\Rightarrow i = i(\rho)$
$di = i'(\rho)\,d\rho$
$\overset{(44)}{\Rightarrow} ds = 0$

$$i = \int^{\rho} \frac{p'(\tau)}{\tau}\,d\tau. \qquad (46)$$

Σε μία ισεντροπική ροή, η εσωτερική ενέργεια ικανοποιεί βάσει της (45) τη σχέση

$$d\varepsilon = \frac{p\,d\rho}{\rho^2}, \qquad (47a)$$

και συνεπώς

$$\varepsilon = \int^{\rho} \frac{p(\tau)}{\tau^2}\,d\tau. \qquad (47b)$$

Για ισεντροπικές ροές όπου $p = p(\rho)$ η ολοκληρωτική μορφή του νόμου της διατήρησης της ενέργειας έχει τη διατύπωση: <u>Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας σ' ένα τμήμα του ρευστού, είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου επί αυτού</u>, δηλ.

$$\frac{d}{dt}E_{tot} = \frac{d}{dt}\int_{W_t}\left(\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + \rho\varepsilon\right)dV = \qquad (48a)$$

απόδειξη

$$= \int_{W_t}\rho\vec{u}\cdot\vec{b}\,dV + \int_{\partial W_t} -p\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA. \qquad (48b)$$

Η εξίσωση (48a) είναι ακριβώς η (38), και η μετάβαση από αυτή στην (48b) βασίζεται στο θεώρημα μεταφοράς (32) και την σχέση (47b): $p = \rho^2 \partial\varepsilon/\partial\rho$.

Στην περίπτωση λοιπόν ισεντροπικής ροής, οι εξισώσεις Euler έχουν τη μορφή

$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{b} = -\nabla i + \vec{b}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\nabla i + \vec{b} \\ \frac{D\rho}{Dt} &+ \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0 \end{aligned}\right\}, \text{ στο } D,$$

με κατάλληλη οριακή συνθήκη στο ∂D. Εάν επί παραδείγματι το ∂D κινείται με δοθείσα ταχύτητα $\vec{V}$, τότε $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial D} = \vec{V}\cdot\vec{n}$. Θα δούμε αργότερα ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών γιά τις εξισώσεις αυτές είναι καλώς τοποθετημένο υπό την προϋπόθεση: $p'(\rho) > 0$. Η συνθήκη αυτή είναι σύμφωνη με τη φυσική μας διαίσθηση ότι όταν η πίεση αυξάνει, η πυκνότητα επίσης αυξάνει.

Οι περιπτώσεις (A) και (B) που εξετάσαμε παραπάνω είναι δύο ακραίες αντίθετες περιπτώσεις. Όταν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, $\rho = \rho_0$, τότε το p δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση του ρ. Ωστόσο μπορεί να θεωρηθεί ως η οριακή περίπτωση όπου $p'(\rho) \to \infty$. Στην περίπτωση της ισεντροπικής ροής, το p είναι συνάρτηση του ρ, $p = p(\rho)$, και βέβαια εξαρτάται από το $\vec{u}$ μέσω του ρ. Αντίθετα, στην περίπτωση (A) το p μόνο έμμεσα εξαρτάται από τη συνθήκη $\operatorname{div}\vec{u}=0$.

2.1.4. Μόνιμες ροές και το θεώρημα Bernoulli

Δοθέντος του πεδίου ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x},t)$ του ρευστού, θα ονομάζουμε γραμμή ροής κατά τη χρονική στιγμή t μία ολοκληρωτική καμπύλη του πεδίου $\vec{u}$. Εάν $\vec{x}=\vec{x}(\sigma)$ είναι μία τέτοια γραμμή τη στιγμή t, τότε

$$\frac{d\vec{x}}{d\sigma} = \vec{u}(\vec{x}(\sigma),t)\,,\quad t=\sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{49}$$

Τροχιά ενός στοιχείου του ρευστού καθώς ο χρόνος αυξάνει είναι η καμπύλη $\vec{x}=\vec{x}(t)$ για την οποία

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}(t),t) \tag{50}$$

η οποία ικανοποιεί δοθείσες αρχικές συνθήκες για $t=0$. Εάν η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι τέτοια ώστε $\partial_t\vec{u}=0$, τότε οι γραμμές ροής και οι τροχιές ταυτίζονται, και η ροή καλείται μόνιμη (μπορούμε να διαλέξουμε $\sigma=t$).

ρεφ. 2.22

Θεώρημα Bernoulli: Σε μία μόνιμη ισεντροπική ροή (αντ. ασυμπίεστη ροή ομογενούς ρευστού με πυκνότητα ρ_0) η ποσότητα

$\vec{b}=0$

$$\frac{1}{2}|\vec{u}|^2+i \quad \left(\text{αντ.}\ \frac{1}{2}|\vec{u}|^2+P/\rho_0\right) \tag{51}$$

είναι σταθερή κατά μήκος των γραμμών ροής.

Απόδειξη: Από την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}\nabla\left(|\vec{u}|^2\right) = (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}), \qquad (52)$$

επειδή η ροή είναι μόνιμη και ισεντροπική, οπότε

$\partial_t \vec{u} = 0$

$\vec{b}=0 \Rightarrow$ ισεντροπική

$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla i$

$\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$, $\partial_t \vec{u} = 0$

$$(\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\nabla i, \qquad (53)$$

παίρνομε

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i\right) = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}), \qquad (54)$$

Εάν $\vec{x}(s)$ είναι μία γραμμή ροής έχομε

$$\frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + i\right)\Bigg|_{\vec{x}(s_1)}^{\vec{x}(s_2)} = \int_{s_1}^{s_2} \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i\right)\vec{x}'(s)\,ds =$$

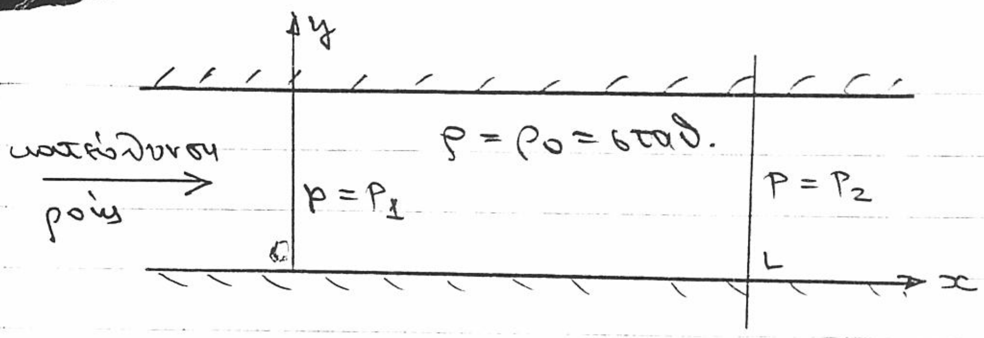
$$= \int_{s_1}^{s_2}\left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)\cdot\vec{x}'(s)\,ds = 0, \qquad (55)$$

διότι $\vec{x}'(s) = \vec{u}(\vec{x}(s)) \perp \left(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})\right)$.
Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής ομογενούς ρευστού, αντί της (53) έχομε την

$$(\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p = -\nabla(p/\rho_0) \qquad (53)'$$

και η απόδειξη είναι ανάλογη. ∎

Παράδειγμα: Μονοδιάστατη ασυμπίεστη ροή σε κανάλι σταθερής διατομής.



$(P_1 > P_2)$

ΣΧΗΜΑ 5

$$\vec{u} = (u(x,t), 0) \qquad p(x,y,t) = p(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ασυμπίεστη ροή: } \partial_x u = 0 \\ \text{εξίσωση Euler: } \rho_0 \partial_t u = -\partial_x p \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\partial_x^2 p = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{p(x) = P_1 - \left(\frac{P_1 - P_2}{L}\right) x}$$

$$\partial_t u = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p \Rightarrow \boxed{u = u(t) = \frac{P_1 - P_2}{\rho_0 L} t + \text{σταθ.}}$$

<u>Άσκηση:</u> Εάν το χωρίο W είναι σταθερό (δεν κινείται με τη ροή), δείξτε ότι

$$\frac{d}{dt} \int_W \left(\frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + \rho\epsilon\right) dV = -\int_{\partial W} \rho\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i\right) \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

3. Περιστροφή και στροβιλότητα ιδανικού ρευστού

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 95

Γ.Ν. Μακράκης

3.1. Στροβιλότητα, τανυστής παραμόρφωσης.

Εάν το πεδίο ταχύτητας του ρευστού είναι $\vec{u}=(u,v,w)$, τό διαννυσματικό πεδίο

$$\vec{\xi} = \nabla\times\vec{u} = (\partial_y w-\partial_z v, \partial_z u-\partial_x w, \partial_x v-\partial_y u)$$

ονομάζεται <u>πεδίο στροβιλότητας</u> της ροής.

Θα εξηγήσουμε τώρα ότι σε μιά μικρή περιοχή γύρω από κάθε σημείο του πεδίου ροής, <u>η ταχύτητα $\vec{u}$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα τριών όρων</u>: μιάς (στερεάς) <u>μεταφοράς</u>, μιάς (στερεάς) <u>περιστροφής</u> με διάνυσμα περιστροφής $\frac{1}{2}\vec{\xi}$, και μιάς <u>παραμόρφωσης</u>. Τούτο είναι ένα γενικό αποτέλεσμα γιά οποιοδήποτε διαννυσματικό πεδίο $\vec{u}$ στον $\mathbb{R}^3$, και δεν έχει σε τίποτα να κάνει με τις επί μέρους ιδιομορφίες των ρευστών. Εστω $\vec{x}$ ένα σημείο στον $\mathbb{R}^3$ καί $\vec{y}=\vec{x}+\vec{h}$ ένα γειτονικό του σημείο. Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{\vec{u}(\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \frac{1}{2}\vec{\xi}\times\vec{x} + \underset{\sim}{D}(\vec{x})\cdot\vec{h} + O(h^2)} \qquad (1)$$

όπου $\underset{\sim}{D}(\vec{x})$ είναι ένας 3×3 συμμετρικός πίνακας, και $h=|\vec{h}|$ το μήκος του $\vec{h}$, το οποίο υποθέτουμε επαρκώς μικρό.

<u>Απόδειξη της (1):</u> Εστω $\nabla\vec{u}$ ό Ιακωβιανός πίνακας του $\vec{u}$

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Από το θεώρημα Taylor έχομε

$$\vec{u}(\vec{y}) = \vec{u}(\vec{x}) + \nabla\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{h} + O(h^2), \quad (3)$$

όπου $\nabla\vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{h}$ είναι πολλαπλασιασμός πινάκων με $\vec{h}$ διάνυσμα στήλη.

Θέτομε

$$\underset{\sim}{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\right] \quad (4)$$

και

$$\underset{\sim}{S} = \frac{1}{2}\left[\nabla\vec{u} - (\nabla\vec{u})^T\right] \quad (5)$$

οπότε προφανώς

$$\nabla\vec{u} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{S}. \quad (6)$$

Ως προς τις συντεταγμένες του $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ το $\underset{\sim}{S}$ έχει τη μορφή

$$\underset{\sim}{S} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

οπότε

$$\underset{\sim}{S}\cdot\vec{h} = \frac{1}{2}\vec{\xi}\times\vec{h} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας τις (7) και (8) στην (3) παίρνομε την (1).

Επειδή το $\underset{\sim}{D}$ είναι συμμετρικός πίνακας έχομε

$$\underset{\sim}{D}(\vec{x})\cdot\vec{h} = \nabla_h \psi(\vec{x},\vec{h}), \tag{9}$$

όπου ψ είναι η τετραγωνική μορφή

 άσκηση

$$\psi(\vec{x},\vec{h}) = \frac{1}{2}\langle \underset{\sim}{D}(\vec{x})\cdot\vec{h}, \vec{h} \rangle, \tag{10}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Ορίζομε το $\underset{\sim}{D}$ ως <u>τανυστή παραμόρφωσης</u>.

Θα αναλύσουμε τώρα τη φυσική σημασία του $\underset{\sim}{D}$. Για το σκοπό αυτό, με σταθερό $\vec{x}$, επιλέγομε μία ορθοκανονική βάση $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ως προς την οποία ο $\underset{\sim}{D}$ είναι διαγώνιος

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Με σταθερό $\vec{x}$, θεωρούμε το διανυσματικό μας πεδίο $\vec{u}$ ως συνάρτηση του $\vec{y}$, οπότε

$$\vec{u}(\vec{y}) = \frac{d\vec{y}}{dt} \tag{12}$$

Αμελώντας στην (1) όλους τους όρους εκτός του $\underset{\sim}{D}\cdot\vec{h}$ παίρνομε

$\vec{y} = \vec{x} + \vec{h}$ ($\vec{x}$ = στ.)

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \underset{\sim}{D}\cdot\vec{h}, \text{ δηλ. } \frac{d\vec{h}}{dt} = \underset{\sim}{D}\cdot\vec{h}. \tag{13}$$

Η διανυσματική εξίσωση (13) είναι ισοδύναμη με τρείς βαθμωτές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις στην επιλεγείσα βάση $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$:

$$\frac{d\tilde{h}_i}{dt} = d_i \tilde{h}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3. \qquad (14)$$

(γιατί;) Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής του μοναδιαίου μήκους στην κατεύθυνση $\hat{e}_i$ τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι d_i. Το διανυσματικό πεδίο $\underset{\sim}{D} \cdot \vec{h}$ επομένως "επιμηκύνεται ή επιβραχύνεται" κατά τις κατευθύνσεις $\hat{e}_i$, και λόγω αυτού χρησιμοποιούμε τον όρο "παραμόρφωση".

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός ορθογωνίου με πλευρές μήκους $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ παράλληλα με τους άξονες $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ αντίστοιχα, είναι

$$\frac{d}{dt}(\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3) = \tilde{h}_2 \tilde{h}_3 \frac{d\tilde{h}_1}{dt} + \tilde{h}_1 \tilde{h}_3 \frac{d\tilde{h}_2}{dt} +$$

$$+ \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \frac{d\tilde{h}_3}{dt} = (d_1 + d_2 + d_3)(\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \tilde{h}_3). \qquad (15)$$

Το ίχνος ενός πίνακα είναι αναλλοίωτο κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, οπότε

$$d_1 + d_2 + d_3 = tr \underset{\sim}{D} = tr \left\{ \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) \right\} = div\, \vec{u}. \qquad (16)$$

$\frac{\partial J}{\partial t} = J\,(div\,\vec{u})$ Εκ των (15) και (16) συνάγουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής όγκου είναι ανάλογος του $div\, \vec{u}$ (συγκρίνατε με το λήμμα (24), σελ. 2.12).

Ο σταθερός όρος $\vec{u}(\vec{x}^{\,*})$ στην (3) προφανώς αντιστοιχεί σε μεταφορά. Τέλος, ο όρος $\frac{1}{2} \vec{\xi}(\vec{x}^{\,*}) \times \vec{h}$ επάγει μια ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{h}$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{\xi}(\vec{x}) \times \vec{h} \quad (\vec{x} = \text{σταθ.}). \quad (17)$$

άσκηση

Η λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (17) είναι

$$\vec{h}(t) = \underset{\sim}{R}(t, \vec{\xi}(\vec{x}))\vec{h}(0) \quad (18)$$

όπου $\underset{\sim}{R}(t, \vec{\xi}(\vec{x}))$ είναι ο <u>πίνακας περιστροφής κατά t περί τον άξονα $\vec{\xi}(\vec{x})$</u>, κατά τη θετική φορά (άσκηση: να κατασκευασθεί η λύση (18)).

Επειδή οι στερεές κινήσεις (μεταφορά και περιστροφή) αφήνουν τον όγκο αναλλοίωτο

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\vec{\xi}(\vec{x}) \times \vec{h}\right) = 0 \quad (19)$$

$$\operatorname{div}(\underset{\sim}{S}\cdot h) = tr S$$

όπως προκύπτει από το ότι $tr\,\underset{\sim}{S} = 0$. ∎

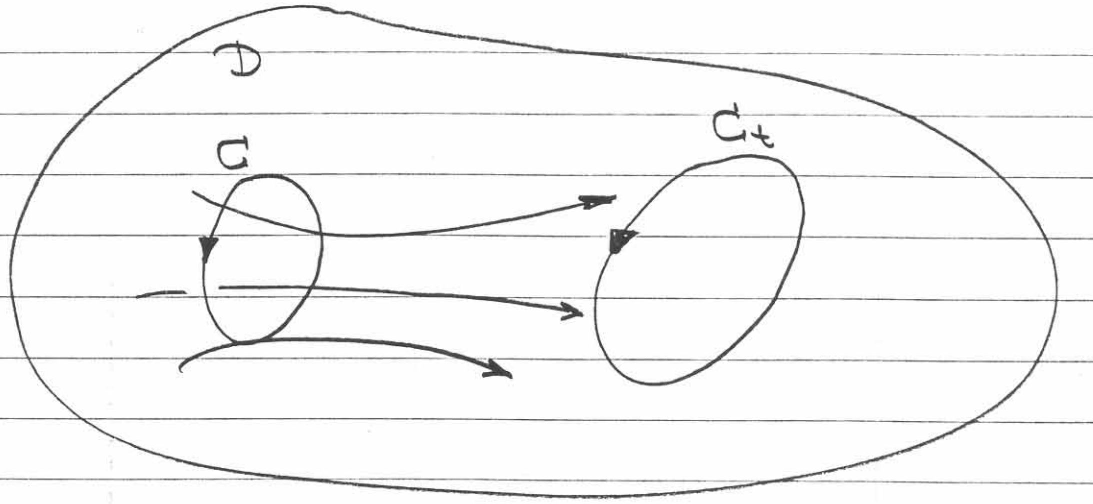
<u>Παρατήρηση:</u> Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας περί ιδανικού (ατριβούς) ρευστού, η μη παρουσία εφαπτομενικών δυνάμεων αποκλείει την έναρξη (η το σταμάτημα προϋπάρχουσας) περιστροφής. Τούτο διαισθητικά υποδεικνύει ότι η περιστροφή διατηρείται. Επειδή η περιστροφή συνδέεται άμεσα με τη στροβιλότητα, αναμένουμε να διατηρείται και η στροβιλότητα, και αυτό θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

3.2. <u>Το θεώρημα κυκλοφορίας του Kelvin</u>

Έστω C μία κλειστή καμπύλη στο πεδίο ροής τη χρονική στιγμή $t=0$ (ΣΧΗΜΑ 1). Έστω C_t η εικόνα της C κάτω από την απεικόνιση ροής

$$C_t = \varphi_t(C) \tag{20}$$

(βλ. σελ. 2.10 για τον ορισμό της απεικόνισης ροής).



ΣΧΗΜΑ 1

Ορίζουμε ως κυκλοφορία (του πεδίου ροής) κατά μήκος της C_t το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \vec{u} \cdot d\vec{s}. \tag{21}$$

Για το μέγεθος αυτό ισχύει το παρακάτω θεώρημα διατήρησης.

Θεώρημα κυκλοφορίας του Kelvin: Για ισεντροπικές ροές η κυκλοφορία Γ_{C_t} είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Λήμμα (Θεώρημα μεταφοράς για καμπύλες): Εάν $\vec{u}(\vec{x},t)$ είναι το πεδίο ταχύτητας της ροής, C μία κλειστή τροχιά και $C_t = \varphi_t(C)$ η τροχιά αυτή όπως μεταφέρεται από τη ροή (ΣΧΗΜΑ 1), τότε

$$\frac{d}{dt}\int_{C_t} \vec{u}\, d\vec{s} = \int_{C_t} \frac{D\vec{u}}{Dt}\, d\vec{s}. \qquad (22)$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{x} = \vec{x}(\sigma)$ η παραμετρική εξίσωση της κλειστής καμπύλης C, $0 \le \sigma \le 1$. Τότε η παραμετρική εξίσωση της C_t είναι $\varphi(\vec{x}(\sigma),t)$, $0 \le \sigma \le 1$. Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος και της υλικής παραγώγου, έχομε

$$\frac{d}{dt}\int_{C_t} \vec{u}\, d\vec{s} = \frac{d}{dt}\int_0^1 \vec{u}(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\vec{x}(\sigma),t)\,d\sigma =$$

$$= \int_0^1 \frac{D\vec{u}}{Dt}(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\vec{x}(\sigma),t)\,d\sigma \; +$$

$$+ \int_0^1 \vec{u}(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\vec{x}(\sigma),t)\,d\sigma. \qquad (23)$$

Επειδή $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \vec{u}$, το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (23) ισούται με

$$\int_0^1 \vec{u}(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\vec{u}(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma}(\vec{u}\cdot\vec{u})(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t)\,d\sigma = 0, \qquad (24)$$

γιατί η C_t είναι κλειστή. Συνεπώς η (23) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\int_{C_t} \vec{u}\, d\vec{s} = \int_0^1 \frac{D\vec{u}}{Dt}\left(\varphi(\vec{x}(\sigma),t),t\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}\varphi(\vec{x}(\sigma),t)\,d\sigma =$$

$$= \int_{C_t} \frac{D\vec{u}}{Dt}\, d\vec{s}. \qquad (25)$$

■

<u>Απόδειξη του θεωρήματος κυκλοφορίας:</u> Από το παραπάνω λήμμα, και το γεγονός ότι η ροή είναι ισεντροπική, δηλ. $\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla i$ (βλ. σελ. 2.23), έχομε

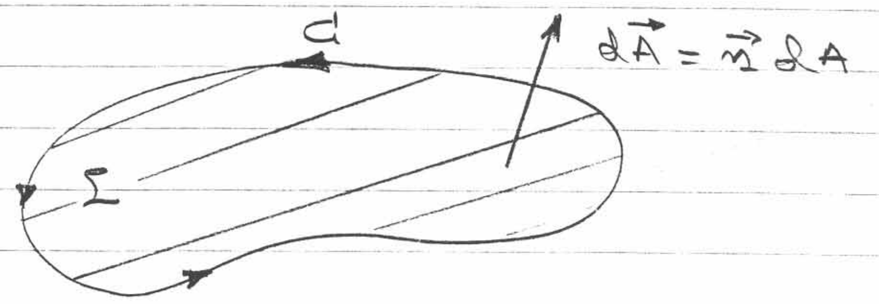
ενθαλπία

$$\frac{d}{dt}\Gamma_{C_t} = \frac{d}{dt}\int_{C_t}\vec{u}\, d\vec{s} = \int_{C_t}\frac{D\vec{u}}{Dt}\, d\vec{s} =$$

$$= -\int_{C_t} \nabla i\, d\vec{s} = 0 \qquad (26)$$

διότι η C_t είναι κλειστή. ■

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το <u>θεώρημα Stokes</u>, γιά να εισάγομε στην ανάλυσή μας το <u>μέγεθος της στροβιλότητας</u>. Εάν Σ είναι μία επιφάνεια της οποίας το σύνορο είναι η κλειστή καμπύλη C (ΣΧΗΜΑ 2), το θεώρημα



<u>ΣΧΗΜΑ 2</u>

Stokes και δίνει

$$\Gamma_C = \int_C \vec{u}\cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla\times\vec{u})\,\vec{n}\,dA =$$

$$= \iint_{\Sigma} \vec{\xi}\cdot d\vec{A}. \qquad (27)$$

ροή στροβιλότητας μέσω της Σ

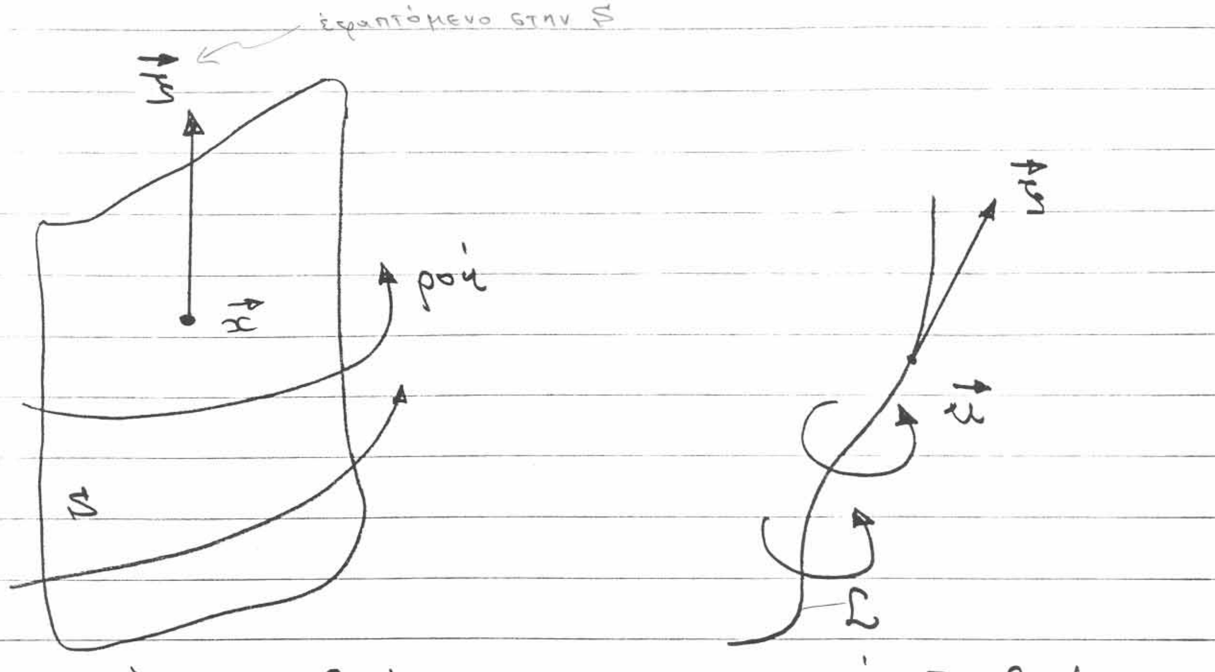
Από την (27) και το θεώρημα Kelvin συνάγομε το ακόλουθο

Πόρισμα: Η ροή στροβιλότητας μέσω μιας επιφάνειας η οποία μεταφέρεται από τη ροή είναι σταθερή ως προς το χρόνο.

Ορίζομε σαν φύλλο στροβιλότητας (η γραμμή στροβιλότητας στο $\mathbb{R}^2$) την επιφάνεια S (η τη γραμμή L) η οποία σε κάθε σημείο της είναι εφαπτόμενη στο διάνυσμα στροβιλότητος $\vec{\xi}$.

Πρόταση: Εάν μία επιφάνεια (η μία καμπύλη) κινείται με μια ροή η οποία είναι ισεντροπική, και είναι φύλλο (η γραμμή) στροβιλότητος γιά $t=0$, παραμένει τέτοια γιά όλους τους χρόνους (ΣΧΗΜΑ 3).

Απόδειξη: Εάν $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στην S, γιά $t=0$ έχομε $\vec{\xi}\cdot\vec{n}=0$ από τον ορισμό του φύλλου στροβιλότητος. Σύμφωνα μέ το θεώρημα κυκλοφορίας, η ροή του $\vec{\xi}$ μέσω οποιουδήποτε $\tilde{S}\subset S$ γιά κάθε χρονική στιγμή t θα είναι μηδέν, δηλ.



φύλλο στροβιλότητας γραμμή στροβιλότητας

ΣΧΗΜΑ 3

$$\iint_{S} \vec{\xi}\cdot\vec{\eta}\, dA = 0, \quad \forall t>0. \qquad (28)$$

Συνεπώς $\vec{\xi}\cdot\vec{\eta} \equiv 0$, $\forall t>0$, πάνω στην S, και συνεπώς η S παραμένει φύλλο στροβιλότητας για όλους τους χρόνους. ∎

Άσκηση: Να αποδειχθεί (με χρήση του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων) ότι, τοπικά, μια γραμμή στροβιλότητας είναι η τομή δύο φύλλων στροβιλότητας.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η στροβιλότητα ανά μονάδα μάζας, $\vec{w} = \vec{\xi}/\rho$, "μεταφέρεται με τη ροή". Υποθέτουμε ότι είμαστε στον $\mathbb{R}^3$ (η περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ θα εξετασθεί αργότερα).

<u>Πρόταση:</u> Γιά ισεντροπική ροή με $\vec{\xi} = \nabla \times \vec{u}$, και $\vec{w} = \vec{\xi}/\rho$, έχομε

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} - (\vec{w}\,\nabla)\vec{u} = 0 \qquad (29)$$

και

$$\vec{w}(\varphi(\vec{x},t),t) = \nabla\varphi_t(\vec{x})\cdot\vec{w}(\vec{x},0), \qquad (30)$$

όπου φ_t είναι η απεικόνιση ροής και $\nabla\varphi_t$ ο Ιακωβιανός πίνακας αυτής (ΣΧΗΜΑ 4).

Απόδειξη: Από την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} \qquad (31)$$

και την εξίσωση κίνησης γιά ισεντροπική ροή

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla i$$

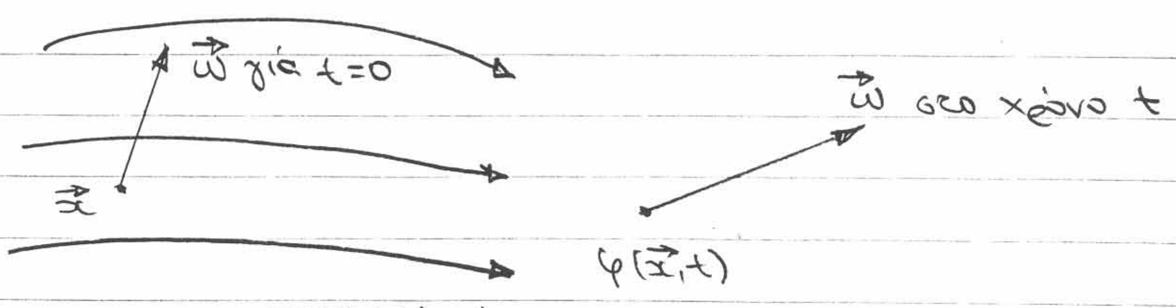
έχομε

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u}) - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) = -\nabla i \qquad (32)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $(\nabla\times)$ στην (32) παίρνομε

να γίνουν οι πράξεις

$\nabla\times\nabla f = 0$



<u>ΣΧΗΜΑ 4</u>

$0 = \partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\vec{u}) =$
$= D\rho/Dt + \rho(\nabla\cdot\vec{u})$

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{u}\times\vec{\xi}) = 0$$

ή

$\nabla(F\times G) = F(\nabla\cdot G) - G(\nabla\cdot F) + (G\cdot\nabla)F - (F\cdot\nabla)G$

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} - \left[(\vec{\xi}\nabla)\vec{u} - \vec{\xi}(\nabla\vec{u}) - (\vec{u}\nabla)\vec{\xi} + \vec{u}(\nabla\vec{\xi})\right] = 0$$

ή

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} - (\vec{\xi}\nabla)\vec{u} - \vec{\xi}(\nabla\vec{u}) = 0. \qquad (33a)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας έχομε

$$\frac{D\vec{w}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\xi}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{D\vec{\xi}}{Dt} - \underbrace{\frac{\vec{\xi}}{\rho}(\nabla\vec{u})}_{= -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}\vec{\xi}}. \qquad (33b)$$

Από τις (33a) και (33b) παίρνομε την (29).

Για την απόδειξη της (30) θέτουμε

$$F(\vec{x},t) = \vec{w}(\varphi(\vec{x},t),t) \text{ και } \vec{G}(\vec{x},t) = \nabla\varphi_t(\vec{x})\vec{w}(\vec{x},0).$$

Από την (29) έχομε

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} = (\vec{F}\nabla)\vec{u}. \qquad (34)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης

$$\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} = \nabla\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\vec{x},t)\right]\vec{w}(\vec{x},0) = \nabla\left(\vec{u}(\varphi(\vec{x},t),t)\right)\vec{w}(\vec{x},0) =$$

$$= (\nabla\vec{u})\cdot\underbrace{\boxed{\nabla\varphi_t(\vec{x})\cdot\vec{w}(\vec{x},0)}}_{=\vec{G}} = (\vec{G}\nabla)\vec{u}. \qquad (35)$$

Από τις (34) και (35) συνάγομε ότι οι $\vec{F}$ και $\vec{G}_t$ ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, και επειδή είναι ίσες για $t=0$, είναι ίσες για κάθε χρόνο t. ∎

<u>Άσκηση:</u> Να αποδειχθεί η πρόταση περί διατήρησης των φύλλων στροβιλότητας (σελ. 3.9) με χρήση της εξίσωσης (30) και της εξίσωσης διατήρησης μάζας (σελ. 2.16)

$$\rho(\vec{x},0) = \rho(\varphi(\vec{x},t),t)\, J(\vec{x},t). \qquad (2(36))$$

(συγκρίνατε τη σχέση αυτή με την (30)).

<u>Για διδιάστατες ροές</u> όπου $\vec{u}=(u,v,0)$, το διάνυσμα στροβιλότητας $\vec{\xi}$ έχει προφανώς μόνο μία συνιστώσα, $\vec{\xi}=(0,0,\xi)$. Το θεώρημα κυκλοφορίας απαιτεί ότι εάν Σ_t είναι ένα οποιοδήποτε χωρίο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο κινείται μαζί με τη ροή, τότε

$$\text{ροή στροβιλότητας} = \iint_{\Sigma_t} \xi \, dA = \text{σταθερό ως προς } t. \qquad (36)$$

Πράγματι, η (30) σε δύο διαστάσεις παίρνει τη μορφή

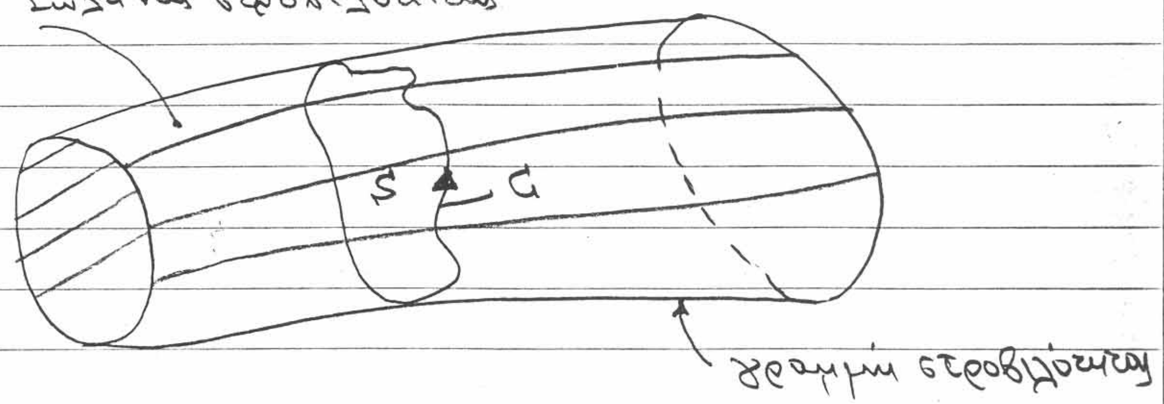
$$\frac{\xi}{\rho}(\varphi(\vec{x},t),t) = \frac{\xi}{\rho}(\vec{x},0), \qquad (30)'$$

δηλ., το $\frac{\xi}{\rho}$ "μεταφέρεται" ως βαθμωτό μέγεθος από τη ροή. Χρησιμοποιώντας την (2(36)) και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής προκύπτει η (36) σαν ειδική περίπτωση του πορίσματος της σελ. 3.9.

Προκειμένου όμως για <u>τρισδιάστατες ροές</u> η εξίσωση

(30) επιτρέπει πολύ περισσότερο πολύπλοκη συμπεριφορά.

Θα ονομάζουμε <u>σωλήνα στροβιλότητας</u> μία διδιάστατη επιφάνεια S η οποία είναι παντού εφαπτόμενη με το πεδίο στροβιλότητας $\vec{\xi}$, με γενέτειρες γραμμές στροβιλότητας οι οποίες διέρχονται από τα σημεία μιας κλειστής καμπύλης C της S (ΣΧΗΜΑ 5). Οι γραμμές στροβιλότητας είναι ολοκληρωτικές τροχιές του $\vec{\xi}$ και εκτείνονται σ' όλη την έκταση του πεδίου ροής.



<u>ΣΧΗΜΑ 5</u>

Ακριβέστερα, υποθέτουμε ότι η S είναι διαφορομορφισμός (1-1 διαφορίσιμη, αντιστρέψιμη απεικόνιση) σ' ένα δίσκο, και ότι ο σωλήνας στροβιλότητας είναι διαφορομορφισμός του καρτεσιανού γινομένου του δίσκου και της πραγματικής ευθείας. Η κατασκευή του σωλήνα στροβιλότητας προϋποθέτει ότι το $\vec{\xi}$ δεν έχει σημεία μηδενισμού (πράγμα που φυσικά δεν συμβαίνει πάντα!).

Θα μελετήσουμε τώρα τη <u>διατήρηση της κυκλοφορίας γύρω από ένα σωλήνα στροβιλότητας.</u>

<u>Θεώρημα του Helmholtz:</u> Σε μία ισεντροπική ροή

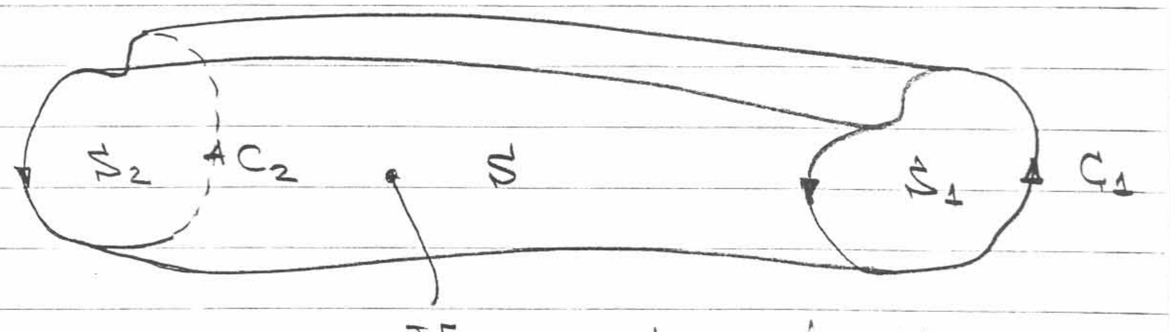
(α) Εάν C_1 και C_2 είναι δύο οποιεσδήποτε κλειστές τροχιές που περικλείουν σωλήνα στροβιλότητας (ΣΧΗΜΑ 6)

$$\int_{C_1} \vec{u}\, d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{u}\, ds \qquad (37)$$

Η κοινή τιμή των ολοκληρωμάτων στην (37) καλείται <u>ένταση</u> του σωλήνα στροβιλότητας.

(β) Η ένταση ενός σωλήνα στροβιλότητας είναι σταθερή ως προς το χρόνο, καθώς ο σωλήνας μεταφέρεται με τη ροή.

Απόδειξη: (α) Έστω οι C_1, C_2 όπως στο ΣΧΗΜΑ 6.



<u>ΣΧΗΜΑ 6</u>

Επειδή το $\vec{\xi}$ είναι εφαπτόμενο στην παράπλευρη επιφάνεια ενός σωλήνα στροβιλότητας, η S είναι φύλο στροβιλότητας. Εάν V είναι ο όγκος που περικλείεται στο σωλήνα στροβιλότητας μεταξύ των C_1 και C_2, και

$\Sigma = S \cup S_1 \cup S_2$ το σύνορο του V, από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec{\xi}\, d\vec{x} = \int_\Sigma \vec{\xi} \cdot d\vec{A} =$$

(γιατί;)

$$= \int_{S_1 \cup S_2} \vec{\xi} \cdot d\vec{A} + \int_S \vec{\xi} \cdot d\vec{A}. \quad (38)$$

Από το θεώρημα Stokes

$$\int_{C_1} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{\xi} \cdot d\vec{A}, \quad \int_{C_2} \vec{u} \cdot d\vec{s} = -\int_{S_2} \vec{\xi} \cdot d\vec{A}. \quad (39)$$

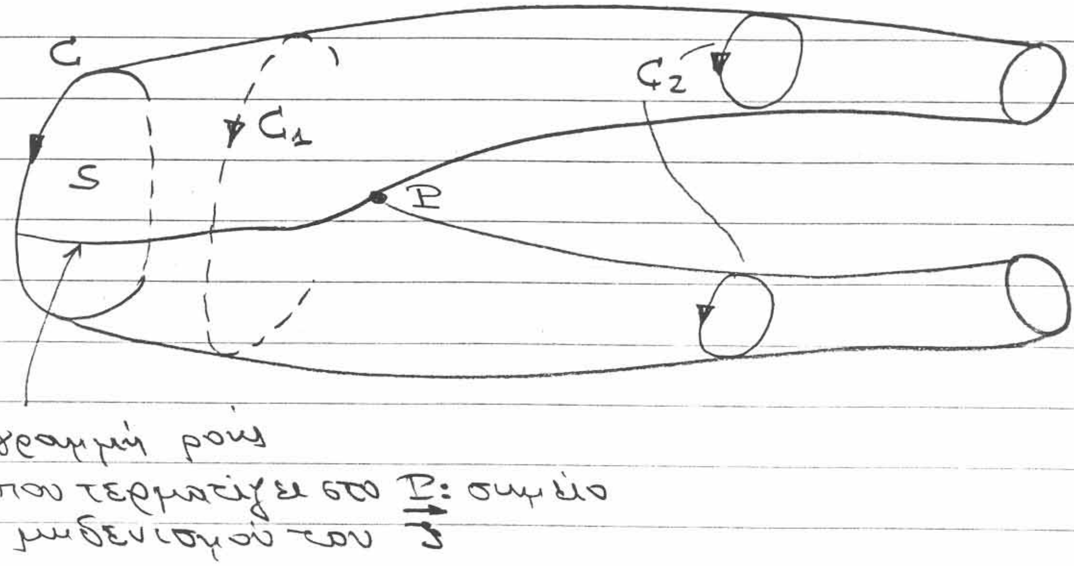
Από τις (38) και (39) προκύπτει η (37) λόγω ότι $\vec{\xi} \cdot \vec{\nu}\big|_S = 0$.

(β) Προκύπτει από το (α) και το θεώρημα κυκλοφορίας του Kelvin. ∎

<u>Παρατήρηση</u>: Εάν ο σωλήνας στροβιλότητας παραμορφώνεται έτσι ώστε η διατομή του να μειώνεται, το μέτρο της στροβιλότητας $\vec{\xi}$ πρέπει να αυξάνει. Συνεπώς, <u>η συρρίκνωση του σωλήνα στροβιλότητας αυξάνει τη στροβιλότητα, αλλά δεν μπορεί να την δημιουργήσει εάν δεν προυπάρχει.</u>

Ένας σωλήνας στροβιλότητας με μη μηδενική ένταση δεν μπορεί να τερματίζεται στο εσωτερικό του πεδίου ροής. Όμως μπορεί να έχει είτε τη μορφή δακτυλίου, είτε να εκτείνεται έως το άπειρο, ή να τερματίζει πάνω σ' ένα στερεό σύνορο του πεδίου ροής. Η "συνήθης εξήγηση" έχει ως ακολούθως. Υποθέτουμε ότι ο σωλήνας τερματίζει σε κάποια τομή S_1 μέσα στο πεδίο ροής. Επειδή ο σωλήνας δεν μπορεί να επεκταθεί, πρέπει να έχομε $\vec{\xi}=0$ στην C_1. Επομένως, η ένταση είναι μηδέν και αυτό αποτελεί αντίφαση.

Η "απόδειξη" αυτή είναι όμως τελείως ελλιπής. Πρώτα απ' όλα, γιατί θα έπρεπε ένας σωλήνας στροβιλότητας να τερματίζει ομαλά σε μία επιφάνεια; Γιατί δεν θα μπορούσε να διαχωρίζεται σε δύο τμήματα όπως φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 7,



ΣΧΗΜΑ 7

Δεν υφίσταται κανένας λόγος εκ των προτέρων γιά τον οποίο αυτό δεν μπορεί να συμβεί, εκτός και αν το αποκλείσομε (υπόθεση). Επιπλέον, ούτε ο ισχυρισμός ότι ένας σωλήνας στροβιλότητας δεν μπορεί να τερματίζει εντός του ρευστού φαίνεται σωστός εάν το $\vec{\xi}$ έχει σημεία μηδενισμού, και πιθανώς είναι λανθασμένος ακόμη και όταν δεν έχει τέτοια σημεία (η τροχιά ενός διανυσματικού πεδίου μπορεί να περιελίσσεται χωρίς τερματισμό και να μην καταλήγει σ' ένα σημείο - π.χ. μία καμπύλη με μη ρητή κλίση πάνω σ' ένα τόρο).

Συνεπώς, η "πρόταση" περί τερματισμού του σωλήνα στροβιλότητας είναι αληθής μόνο αν ο τερματισμός ερμηνευθεί κατάλληλα.

Η διαφορά μεταξύ των διδιάστατων και τριδιάστατων νόμων διατήρησης της στροβιλότητας είναι πολύ σημαντική. Η εξίσωση διατήρησης της στροβιλότητας (30)' σε δύο διαστάσεις είναι ένα χρήσιμο εργαλείο γιά την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων των εξισώσεων Euler (αλλά και των εξισώσεων Navier-Stokes). Η έλλειψη ενός αντίστοιχου νόμου στις τρείς διαστάσεις είναι το κύριο εμπόδιο γιά την κατανόηση της συμπεριφοράς των λύσεων των εξισώσεων Euler. Το κύριο ζητούμενο είναι η απόδειξη θεωρημάτων ύπαρξης λύσεων γιά όλους τους χρόνους. Προς το παρόν, είναι γνωστό μόνο στις δύο διαστάσεις ότι υπάρχουν ολικές (ως προς χρόνο) λύσεις που είναι ομαλές.

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό με την μελέτη της εξίσωσης στροβιλότητας γιά ασυμπίεστη ροή σε δύο διαστάσεις. Η διδιάστατη εξίσωση στροβιλότητας έχει τη μορφή

$$\frac{D\xi}{Dt} = \partial_t \xi + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\xi = 0\,, \qquad (40)$$

όπου $\xi = \xi(x,y,t) = \partial_x v - \partial_y u$ είναι η (βαθμωτή) στροβιλότητα του πεδίου ροής, και u, v είναι οι συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας $\vec{u}$. Εάν το πεδίο ροής περιορίζεται εντός του επιπέδου χωρίου D με στερεό σύνορο ∂D, έχουμε την οριακή συνθήκη

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0, \quad \text{στο} \quad \partial D, \tag{41}$$

με $\vec{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί του ∂D. Περαιτέρω υποθέτομε ότι το χωρίο D είναι απλά συνεκτικό. Τότε, η συνθήκη ασυμπιεστότητος μας δίνει

$$\partial_x u = -\partial_y v, \tag{42}$$

οπότε υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\psi(x,y,t)$ μοναδικά ορισμένη επί του D με προσέγγιση σταθεράς, τέτοια ώστε

$$u = \partial_y \psi \quad , \quad v = -\partial_x \psi. \tag{43}$$

Η συνάρτηση ψ που εισάγεται από τη σχέση (43) καλείται συνάρτηση ροής στο χρόνο t. Οι σταθμικές καμπύλες της ψ είναι οι γραμμές ροής. Και τούτο διότι αν $(x(s), y(s))$ είναι η παραμετρική αναπαράσταση μιας γραμμής ροής, τότε $x'(s) = u(x,y)$ και $y'(s) = v(x,y)$. Συνεπώς

$$\frac{d}{ds}\psi(x(s), y(s), t) = \partial_x\psi \cdot x'(s) + \partial_y \psi\, y'(s) =$$

$$= -vu + uv = 0. \tag{44}$$

Η (41) εξασφαλίζει ότι το σύνορο ∂D είναι γραμική ροής, και γιά το λόγο αυτό μπορούμε να επιλέξουμε τη σταθερά στον ορισμό της ψ ώστε

$$\psi(x,y,t) = 0 \quad \text{γιά} \quad (x,y)\in \partial D,\ t>0. \qquad (45)$$

Οι (43) και (45) ορίζουν τώρα κατά μοναδικό τρόπο την ψ. Ωστόσο το ∂D δεν πρέπει να είναι ολόκληρο μία γραμμή ροής, αλλά μπορεί να αποτελείται από περισσότερες γραμμές ροής οι οποίες διαχωρίζονται από <u>σημεία μηδενισμού της $\vec{u}$</u> (<u>σημεία ανακοπής</u> της ροής).

Η (βαθμωτή) στροβιλότητα του διδιάστατου πεδίου ροής, εκφράζεται συναρτήσει της συνάρτησης ροής μέσω της εξίσωσης Poisson

$$\zeta = \partial_x v - \partial_y u = -\partial_x^2\psi - \partial_y^2\psi = -\Delta\psi \qquad (46)$$

όπου $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ είναι ο τελεστής Laplace σε δύο διαστάσεις.

Συνοψίζοντας τις εξισώσεις γιά τη στροβιλότητα σε δύο διαστάσεις έχομε

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \partial_t\zeta + (\vec{u}\cdot\nabla)\zeta = 0 \qquad \text{στο } D \qquad (47a)$$

$$\Delta\psi = -\zeta \qquad \text{στο } D \qquad (47b)$$

$$\psi = 0 \qquad \text{στο } \partial D \qquad (47c)$$

με

$$u = \partial_y\psi \quad \text{και} \quad v = -\partial_x\psi. \qquad (47d)$$

Οι εξισώσεις (47) ορίζουν πλήρως τη ροή, διότι δοθέντος του πεδίου στροβιλότητος ζ, οι (47b) και (47c) ορίζουν την συνάρτηση ροής ψ χωρικά, και η (47a) ορίζει την χρονική εξέλιξη του ζ.

Ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (47a) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\zeta = u\partial_x\zeta + v\partial_y\zeta = (\partial_y\psi)(\partial_x\zeta) - (\partial_x\psi)(\partial_y\zeta) =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_x\zeta & \partial_y\zeta \\ \partial_x\psi & \partial_y\psi \end{vmatrix} = J(\zeta,\psi), \qquad (48)$$

όπου $J(\zeta,\psi)$ είναι η Ιακωβιανή των ζ και ψ. Η σχέση αυτή και η εξίσωση (47a) οδηγούν στην παρακάτω

Πρόταση: Η ροή είναι μόνιμη εάν και μόνο εάν η στροβιλότητα ζ και η συνάρτηση ροής ψ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. ■

Τέλος, προκειμένου περί τριδιάστατης ροής ασυμπίεστου ιδεατού ρευστού αντί των (47) έχομε τις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} - (\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{u} = 0 \qquad (49a)$$

$$\Delta\vec{A} = -\vec{\zeta} \qquad \nabla\cdot\vec{A} = 0 \qquad (49b)$$

$$\vec{u} = \nabla\times\vec{A} \qquad (49c)$$

όπου έχομε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη ασυμπιεστότητος $\nabla\cdot\vec{u}=0$ γιά να εισάγομε το διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ τέτοιο ώστε $\vec{u}=\nabla\times\vec{A}$ με $\nabla\cdot\vec{A}=0$ (δεν απαιτείται το D να είναι απλά συνεκτικό χωρίο, αλλά να μην περιέχει στερεά σύνορα π.χ. αρκεί να είναι κυρτό). Τότε

$$\vec{\xi}=\nabla\times\vec{u}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=$$

$$=-\Delta\vec{A}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=$$

$$=-\Delta\vec{A}. \tag{50}$$

Η βασική δυσκολία με τις εξισώσεις (49) είναι ότι δοθέντος του $\vec{\xi}$, το $\vec{A}$ δεν ορίζεται μοναδικά διότι δεν ισχύει $\vec{A}|_{\partial D}=0$ όπως γιά τη συνάρτηση ροής ψ).

Παράδειγμα 1: Υποθέτομε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η συνάρτηση ροής $\psi(x,y)$ εξαρτάται μόνο από την ακτινική απόσταση $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, οπότε οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι. Θέτουμε $\psi(x,y)=\psi(r)$ και υποθέτουμε $\partial_r\psi(r)>0$. Η ταχύτητα έχει συνιστώσες

$$\left.\begin{aligned} u&=\partial_y\psi=\partial_r\psi\,\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\,\partial_r\psi\\ v&=-\partial_x\psi=-\partial_r\psi\,\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r}\,\partial_r\psi\end{aligned}\right\},$$

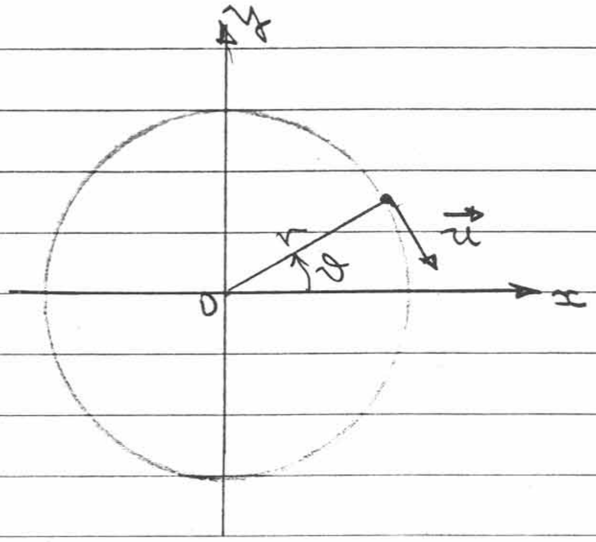
και επειδή $\quad \partial_y r=\dfrac{y}{r}\,,\quad \partial_x r=\dfrac{x}{r}$

η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι εφαπτόμενη στην περιφέρεια ακτίνας r (ΣΧΗΜΑ 8), με μέτρο $|\partial_r \psi|$ και δεξιόστροφη κατεύθυνση εάν $\partial_r \psi > 0$.

Η στροβιλότητα του πεδίου ροής είναι

$$\xi = -\Delta\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right).$$

Επειδή $\partial_r \psi \neq 0$, η απόσταση r μπορεί να γρα-



ΣΧΗΜΑ 8

φεί ως συνάρτηση του ψ και συνεπώς η στροβιλότητα ξ επίσης είναι συνάρτηση του ψ. Συνεπώς, $J(\xi,\psi)=0$, και σύμφωνα με την Πρόταση της σελ. 3.21 η παραπάνω λύση είναι μόνιμη διδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

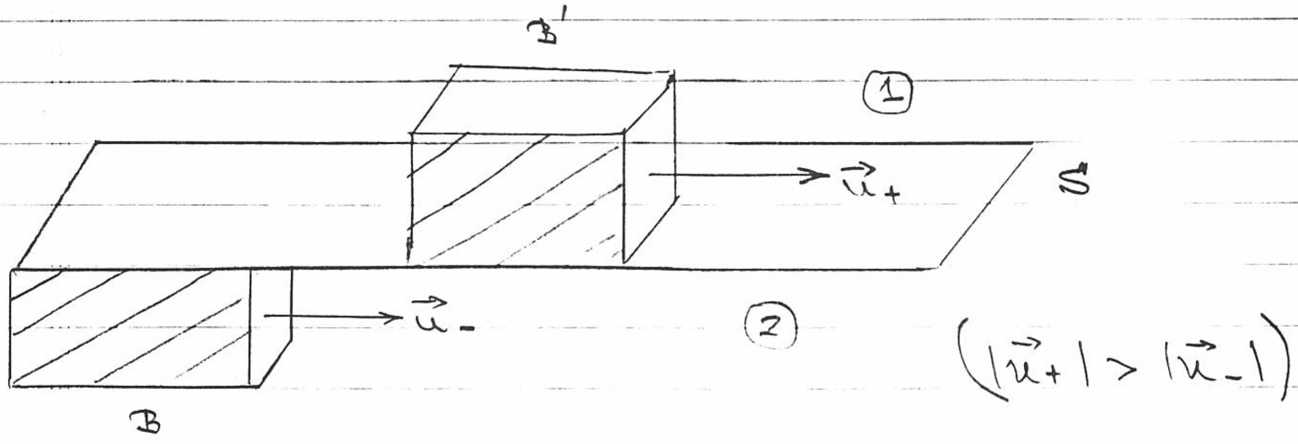
4. Οι εξισώσεις Navier - Stokes

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 95

Γ. Ν. Μακράκης

4.1. Συνεκτικό ρευστό

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε ως ιδανικό ρευστό εκείνο στο οποίο οι δυνάμεις που αναπτύσσονται σε οποιαδήποτε επιφάνεια μέσα στο ρευστό είναι κάθετες προς αυτή. Τώρα θα θεωρήσουμε ότι το ρευστό μας έχει περισσότερο σύνθετη συμπεριφορά και ότι μπορούν να αναπτυχθούν και εφαπτομενικές δυνάμεις. Για να κατανοήσουμε την αναγκαιότητα αυτής της γενίκευσης ας θεωρήσουμε το απλό παράδειγμα που φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 1. Το πεδίο ταχύτητας $\vec{u}$ είναι παράλληλο στην επιφάνεια S, αλλά έχει είτε άλματα είτε γρήγορη μεταβολή κατά την εγκάρσια κατεύθυνση της S. Εάν όλες οι δυνάμεις είναι κάθετες στην S δεν υπάρχει μεταφορά ορμής μεταξύ των στοιχείων B και B' των στοι-



ΣΧΗΜΑ 1

χείων του ρευστού. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν είναι συμβιβαστό με την κινητική θεωρία της ύλης διότι γρήγορα κινούμενα μόρια από την περιοχή 1 θα διαχέονται μέσω της S προς την 2 και θα μεταφέρουν ορμή στο ρευστό που βρίσκεται σ' αυτή την περιοχή, και αντίστροφα αργά μόρια από την περιοχή 2 θα διαχέονται προς την (1) και θα επιβραδύνουν το ρευστό στην περιοχή αυτή. Γιά σχετικά μεγάλες μεταβολές ταχύτητος σε μικρές αποστάσεις, το φαινόμενο είναι σημαντικό.

Κατά συνέπεια τροποποιούμε την παραδοχή που έχουμε γιά τη δύναμη στην S. Αντί της

δύναμη/μονάδα επιφάνειας στην $S = p(\vec{x},t)\vec{n}$
(ιδεατό ρευστό),

$\vec{n}$ = μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της S, εισάγομε την ακόλουθη παραδοχή

δύναμη/μονάδα επιφάνειας στην $S = p(\vec{x},t)\vec{n} + \underset{\sim}{\sigma}(\vec{x},t)\vec{n}$ (1)
(συνεκτικό ρευστό)

όπου $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι ένα μητρώο το οποίο ονομάζουμε τανυστή τάσεων. Γιά το $\underset{\sim}{\sigma}$ πρέπει να εισάγουμε κατάλληλες υποθέσεις. Το βασικό νέο χαρακτηριστικό είναι ότι το $\underset{\sim}{\sigma}\cdot\vec{n}$ δεν είναι κατ' ανάγκη παράλληλο του $\vec{n}$. Ο διαχωρισμός της δύναμης σε δύναμη πίεσης και σε "άλλες δυνάμεις" που κάναμε στην (1), δεν είναι ούτε αναγκαστικός ούτε απόλυτος, γιατί ο όρος $\underset{\sim}{\sigma}\cdot\vec{n}$ μπορεί να περιέχει και συνιστώσες παράλληλες με το $\vec{n}$. Το θέμα αυτό θα λυθεί στη συνέχεια εισάγοντας μία καθορισμένη συναρτησιακή μορφή γιά το $\underset{\sim}{\sigma}$.

Οπως και γιά την περίπτωση του ιδεατού ρευστού ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα επιβάλλει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής σε οποιοδήποτε κινούμενο τμήμα W_t του ρευστού είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που δρα πάνω στο ρευστό στο W_t, δηλ.

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\vec{u}\,dV = -\int_{\partial W_t} \left(p\vec{n} + \underset{\sim}{\sigma}\vec{n}\right) dA \qquad (2)$$

(συγκρίνατε με την εξίσωση 2(21), σελ. 2.11).
Από την (2) φαίνεται αμέσως ότι ο $\underset{\sim}{\sigma}$ τροποποιεί τον όρο μεταφοράς ορμής μέσω του συνόρου ∂W_t. Θα επιλέξουμε το $\underset{\sim}{\sigma}$ έτσι ώστε να προσεγγίζει ικανοποιητικά τη μεταφορά ορμής διά της μοριακής κίνησης.

Μια σημαντική ερώτηση είναι γιατί η δύναμη (1) που επενεργεί στην S είναι γραμμική συνάρτηση του διανύσματος $\vec{n}$. Εάν υποθέσουμε ότι η δύναμη είναι απλά μιά συνεχής συνάρτηση του $\vec{n}$, η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει να είναι γραμμική (Θεώρημα του Cauchy; να αποδειχθεί ως άσκηση).

Οι υποθέσεις που θα κάνουμε για τον $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι:

(i) ο $\underset{\sim}{\sigma}$ εξαρτάται γραμμικά από το $\nabla\vec{u}$

(ii) ο $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι αναλλοίωτος ως προς το μετασχηματισμό της περιστροφής, δηλ. εάν $\underset{\sim}{U}$ είναι ένα ορθογώνιο μητρώο

$UU^t = I$

$$\underset{\sim}{\sigma}\left(\underset{\sim}{U}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\underset{\sim}{U}^{-1}\right) = \underset{\sim}{U}\cdot\underset{\sim}{\sigma}(\nabla\vec{u})\cdot\underset{\sim}{U}^{-1} \qquad (3)$$

(iii) ο $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι συμμετρικός.

Η υπόθεση (ii) είναι συμβιβαστή με το γεγονός ότι σ' ένα ρευστό υποκείμενο σε στερεά περιστροφή δεν υπάρχει μεταβολή ορμής. Η υπόθεση (iii) απορρέει από τη διατήρηση της στροφορμής.

Επειδή ο $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι συμμετρικός, θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από το συμμετρικό κομμάτι του $\nabla\vec{u}$, δηλ. τον τανυστή παραμόρφωσης $\underset{\sim}{D}$, και μάλιστα

$\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{\sigma}$

κατά τρόπο γραμμικό. Ως αποτέλεσμα αυτού οι $\underset{\sim}{\sigma}$ και $\underset{\sim}{D}$ αντιμετατίθενται, και συνεπώς μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα, και οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{\sigma}$ είναι γραμμικές συναρτήσεις των ιδιοτιμών του $\underset{\sim}{D}$. Οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{\sigma}$ πρέπει να είναι επίσης συμμετρικές λόγω της υπόθεσης (ii), επειδή μπορούμε να επιλέξουμε το $\underset{\sim}{U}$ (περιστροφή κατά π περί ένα ιδιοδιάνυσμα) ώστε να εναλλάσσονται δύο ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{D}$ και συνεπώς του $\underset{\sim}{\sigma}$. Οι μόνες γραμμικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες έχουν τη μορφή

$$\sigma_i = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_i \qquad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

όπου σ_i οι ιδιοτιμές του $\underset{\sim}{\sigma}$, και d_i οι αντίστοιχες του $\underset{\sim}{D}$, και λ, μ σταθερές. Επειδή $d_1 + d_2 + d_3 = \nabla\cdot\vec{u}$, επιστρέφοντας στην αρχική βάση (πριν την διαγωνοποίηση) παίρνομε

$$\boxed{\underset{\sim}{\sigma} = \lambda(\nabla\cdot\vec{u})\underset{\sim}{I} + 2\mu\underset{\sim}{D}}, \qquad (5)$$

όπου $\underset{\sim}{I}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Η εξίσωση (5) γράφεται στη μορφή

$$\boxed{\underset{\sim}{\sigma} = 2\mu\left(\underset{\sim}{D} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\vec{u})\underset{\sim}{I}\right) + \zeta(\nabla\cdot\vec{u})\underset{\sim}{I}} \qquad (6)$$

όπου μ είναι ο πρώτος συντελεστής συνεκτικότητας, και $\boxed{\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$ ο δεύτερος συντελεστής συνεκτικότητας. Η ακολουθία των συλλογισμών που μας οδήγησε στην (5) είναι τυπική διαδικασία στην κατασκευή των καταστατικών εξισώσεων για τα συνεχή μέσα, από βασικές αρχές.

και απλές φυσικές υποθέσεις.

4.2. Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Ξεκινώντας από τη μορφή 2(21), σελ. 2.11, του νόμου διατήρησης της ορμής και υπολογίζοντας τον όρο των επιφανειακών δυνάμεων

$$S_{\partial W_t} = \int_{\partial W_t} \underset{\sim}{\sigma} \cdot \vec{n}\, dA \tag{7}$$

με βάση την εξίσωση (6) γιά τον τανυστή τάσεων, καταλήγομε στη διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής γιά το συνεκτικό ρευστό

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\vec{u}) + \mu \Delta \vec{u} \tag{8}$$

όπου

$$\Delta \vec{u} = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\vec{u}. \tag{9}$$

Οι εξισώσεις (8) είναι γνωστές ως εξισώσεις Navier-Stokes, και μαζί με την εξίσωση συνέχειας και μία (κατάλληλη) εξίσωση διατήρησης ενέργειας περιγράφουν πλήρως τη ροή ενός συνεκτικού ρευστού.

Στην περίπτωση ασυμπίεστου ομογενούς ρευστού $\rho=\rho_0=$ $=$ σταθ. οι εξισώσεις (8) παίρνουν τη μορφή

$$\left.\begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\nabla p' + \nu \Delta \vec{u} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

όπου $\nu = \mu/\rho_0$ και $P' = P/\rho_0$ (Εξισώσεις Navier-Stokes γιά ασυμπίεστο ρευστό).

Οι εξισώσεις αυτές υπόκεινται επίσης σε συνοριακές συνθήκες. Γιά τις Εξισώσεις Euler που διέπουν τη ροή ιδεατού ρευστού, χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial D} = 0$ (συνθήκη μη διαπερατότητος του στερεού συνόρου ∂D του πεδίου ροής: το ρευστό όμως μπορεί να κινείται εφαπτομενικά στο ∂D). Προκειμένου όμως γιά τις Εξισώσεις Navier-Stokes η παρουσία του όρου $\nu\Delta\vec{u}$ αυξάνει την τάξη των κυρίων παραγώγων κατά μία τάξη. Γιά φυσικούς, αλλά και μαθηματικούς λόγους, τούτο συνοδεύεται από αύξηση του πλήθους των απαιτούμενων συνοριακών συνθηκών. Επί παραδείγματι, σ' ένα ακίνητο στερεό όριο ∂D επιβάλλουμε την πρόσθετη συνθήκη ότι: η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας είναι επίσης μηδέν, $\vec{u}\cdot\vec{\tau}|_{\partial D} = 0$ ($\vec{\tau}$ = εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα επί του ∂D), οπότε η απαιτούμενη συνθήκη είναι τελικά

$$\boxed{\vec{u}\,|_{\partial D} = \vec{0} \quad \text{(συνθήκη στερεού συνόρου)}}$$

Η μαθηματική αναγκαιότητα γιά την πρόσθετη οριακή συνθήκη, συναρτάται με την απόδειξη της καλής τοποθέτησης των Εξισώσεων Navier-Stokes, δηλ. την ύπαρξη μοναδικής λύσης που εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα αρχικά δεδομένα. Στις τρεις διαστάσεις, είναι γνωστό ότι γιά τις ασυμπίεστες Εξισώσεις Navier-Stokes υπάρχουν ομαλές λύσεις που εξαρτώνται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα, γιά μικρούς χρόνους. Ένα πολύ σημαντικό ανοικτό πρόβλημα είναι να αποδειχθεί (η να απορριφθεί) η ύπαρξη τέτοιων λύσεων γιά όλους τους χρόνους. Στις δύο διαστάσεις υπάρχουν τέτοιες λύσεις γιά όλους τους χρόνους, τόσο γιά ιδανική όσο και γιά συνεκτική ροή.

Η φυσική αναγκαιότητα γιά την πρόσθετη οριακή συνθήκη καθίσταται εμφανής όταν η συνεκτικότητα του ρευστού απορρέει από μηχανισμούς μοριακής διάχυσης. Μιά άλλη σημαντική επίδραση της πρόσθετης οριακής συνθήκης είναι ότι δίνει τη δυνατότητα εισαγωγής στροβιλότητας στη ροή όταν δεν προυπάρχει.

4.3. Ο ρόλος της συνεκτικότητας και της πίεσης

Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση "αλλαγών κλίμακας" στις εξισώσεις Navier-Stokes, και ειδικότερα τον ρόλο του αδιάστατου αριθμού Reynolds, ο οποίος μετράει την επίδραση της συνεκτικότητας στη ροή.

Γιά ένα δοθέν πεδίο ροής επιλέγουμε ένα χαρακτηριστικό μήκος (L) και μία χαρακτηριστική ταχύτητα (U). Αυτά τα μεγέθη επιλέγονται ως ένα βαθμό κατά τρόπο αυθαίρετο. Επί παραδείγματι, εάν μελετάμε τη ροή γύρω από μία σφαίρα, ως χαρακτηριστικό μήκος μπορούμε να επιλέξουμε την ακτίνα η τη διάμετρο, και σαν ταχύτητα το μέτρο της ταχύτητας πολύ μακρυά από τη σφαίρα. Τα δύο μεγέθη ορίζουν συνακόλουθα ένα χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα ($\boxed{T = L/U}$).

Εισάγομε τώρα τις αδιάστατες μεταβλητές

$$\boxed{\vec{u}' = \vec{u}/U \,,\quad \vec{x}' = \vec{x}/L \,,\quad t' = t/T} \qquad (11)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\vec{u} \Rightarrow \frac{D'\vec{u}'}{Dt'}\cdot\frac{U}{T_1} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\nabla' p'}{L} + \nu\Delta'\vec{u}'\frac{U}{L^2} \quad 4.8$$

$$T_1 = L/U, \quad \frac{U}{T_1} = U^2/L$$

οπότε η x-συνιστώσα της (ομογενούς) ασυμπίεστης εξίσωσης Navier-Stokes

$$\frac{D'}{Dt'}\vec{u}' = -\nabla'\underbrace{\left(\frac{p}{\rho_0 U^2}\right)}_{p'} + \frac{\nu}{LU}\Delta'\vec{u}'$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u = -\frac{1}{\rho_0}\partial_x p +$$

$$+\nu\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u\right), \qquad (12)$$

γράφεται στη μορφή

$$\left(\frac{U^2}{L}\right)\left(\partial_{t'} u' + u'\partial_{x'} u' + v'\partial_{y'} u' + w'\partial_{z'} u'\right) =$$

$$= -\frac{U^2}{L}\partial_{x'}\left(\frac{p}{\rho_0 U^2}\right) + \left(\frac{U\nu}{L^2}\right)\left(\partial_{x'}^2 u' + \partial_{y'}^2 u' + \partial_{z'}^2 u'\right).$$

(13)

Αντίστοιχες εξισώσεις παίρνομε και για τις άλλες συνιστώσες, οπότε

$$\partial_{t'}\vec{u}' + (\vec{u}'\cdot\nabla')\vec{u}' = -\nabla' p' + \frac{\nu}{LU}\Delta'\vec{u}' \qquad (14)$$

όπου

$$\boxed{p' = p/\rho_0 U^2.} \qquad (15)$$

Η συνθήκη ασυμπιεστότητος εξακολουθεί να έχει τη μορφή

$$\nabla'\cdot\vec{u}' = 0, \qquad (16)$$

Με βάση τις αδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes (14) εισάγομε τον (αδιάστατο) <u>αριθμό Reynolds</u>

$$\frac{O(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u})}{O(\nu\Delta\vec{u})} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}$$

$$R = \frac{LU}{\nu} \qquad (17)$$

ο οποίος αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης των δυνάμεων αδρανείας ως προς τις δυνάμεις τριβής που αναπτύσσονται στο ρευστό. Εάν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις ροές γύρω δύο σφαίρες διαφορετικών ακτίνων, μία με $U_\infty = 10\,\frac{km}{hr}$ γύρω από μία σφαίρα ακτίνας $r_1 = 10\,m$ και μία άλλη με το ίδιο ρευστό αλλά με $U_\infty = 100\,\frac{km}{h}$ και $r_2 = 1\,m$, και θεωρήσουμε ως (χαρακτηριστικά) μεγέθη L και U την ακτίνα r και την ταχύτητα U_∞ της αδιατάρακτης ροής βρίσκουμε ότι οι αριθμοί Reynolds για τις δύο ροές είναι ίδιοι, $R_1 = R_2$. Οι εξισώσεις συνεπώς για τις δύο ροές είναι οι ίδιες σε αδιάστατη μορφή.

Δύο ροές με όμοιες γεωμετρίες και ίδιο αριθμό Reynolds ονομάζονται όμοιες. Ακριβέστερα, εάν $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ είναι δύο ροές στα χωρία D_1 και D_2 τα οποία έχουν σχέση κλίμακας λ (δηλ. εάν L_1, L_2 είναι χαρακτηριστικές διαστάσεις των D_1, D_2 αντίστοιχα, $L_1 = \lambda L_2$), τότε, εάν επιλέξουμε τις χαρακτηριστικές ταχύτητες U_1 και U_2 και τους συντελεστές συνεκτικότητας έτσι ώστε

$$R_1 = R_2 \quad \left(\text{δηλ.}\ \frac{L_1 U_1}{\nu_1} = \frac{L_2 U_2}{\nu_2}\right), \qquad (18)$$

οι αδιάστατες ταχύτητες $\vec{u}_1'$ και $\vec{u}_2'$ ικανοποιούν την ίδια αδιάστατη εξίσωση στο ίδιο χωρίο (και συνεπώς οι $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ υπολογίζονται η μία από την άλλη με αλλαγή κλίμακας).

Η ιδέα της ομοιότητας των ροών είναι βασική για τον σχεδιασμό πειραματικών διατάξεων. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να κάνουμε ένα νέο σχεδιασμό μιας πτέρυγας αεροσκάφους είναι οικονομικότερο να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του πεδίου ροής γύρω από την πτέρυγα σ' ένα εργαστηριακό μοντέλο πολύ μικρότερης κλίμακας από την πραγματική πτέρυγα. Εάν σχεδιάσουμε ένα μοντέλο γεωμετρικά όμοιο με την πραγματική πτέρυγα και επιλέξουμε τη συνεκτικότητα και την ταχύτητα της αδιατάρακτης ροής στο εργαστήριο έτσι ώστε ο αριθμός Reynolds να είναι ίδιος με τον αναμενόμενο γιά την πραγματική πτέρυγα, τότε μπορούμε να μεταφέρουμε τα εργαστηριακά συμπεράσματα στην πραγματική ροή.

Στις εφαρμογές έχει μεγάλη σημασία να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του πεδίου ροής γιά μεγάλους αριθμούς Reynolds. Πρέπει να τονίσουμε ότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εάν ο συντελεστής συνεκτικότητας ν είναι μικρός, τα φαινόμενα της συνεκτικότητος είναι αμελητέα. Η πρόταση "το ν είναι μικρό" στερείται φυσικής σημασίας διότι δεν λαμβάνει υπ' όψιν την επίδραση των χαρακτηριστικών διαστάσεων και της ταχύτητος. Αντίθετα, η πρόταση "το $1/R$ είναι μικρό" δηλώνει ότι τα φαινόμενα συνεκτικότητας γιά την γεωμετρία που μελετάμε δεν έχουν μεγάλη επίδραση.

Όπως συμβαίνει και στη ροή ασυμπίεστου ιδανικού ρευστού (εξισώσεις Euler), και γιά τη ροή ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού η πίεση P ορίζεται από τη συνθήκη ασυμπιεστότητας $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Στη συνέχεια αναλύομε πιό συστηματικά το ρόλο της πίεσης στην ασυμπίεστη ροή συνεκτικού ρευστού. Έστω D το πεδίο ροής ($D \subset \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$) με λείο σύνορο ∂D.

χωρίς απόδειξη

Θεώρημα Helmholtz - Hodge (αποσύνθεση διανυσματικού πεδίου): Ενα διανυσματικό πεδίο $\vec{w}$ στο D μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\vec{w} = \vec{u} + \nabla p, \tag{19}$$

όπου το $\vec{u}$ είναι παράλληλο στο ∂D, $\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0$, και $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ στο D.

Απόδειξη: Πρώτα απ' όλα θα αποδείξουμε την ακόλουθη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_D \vec{u}\cdot\nabla p \, dV = 0. \tag{20}$$

Από την ταυτότητα

$$\nabla\cdot(p\vec{u}) = (\nabla\cdot\vec{u})p + \vec{u}\cdot\nabla p, \tag{21}$$

τη συνθήκη $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ στο D, και το θεώρημα απόκλισης, παίρνουμε

$$\int_D \vec{u}\cdot\nabla p \, dV = \int_D \nabla\cdot(p\vec{u})\, dV = \int_{\partial D} p\vec{u}\cdot\vec{n}\, dA = 0 \tag{22}$$

διότι $\vec{u}\cdot\vec{n}\,|_{\partial D} = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την (20) για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της αποσύνθεσης (19). Ας υποθέσουμε ότι

$$\vec{w} = \vec{u}_1 + \nabla p_1 = \vec{u}_2 + \nabla p_2, \tag{23}$$

οπότε έχομε

$$0 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \nabla(P_1 - P_2). \qquad (24)$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (24) με το διάνυσμα $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, και ολοκληρώνοντας πάνω στο D έχομε

$$0 = \int_D \left\{ |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|^2 + (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\cdot\nabla(P_1 - P_2) \right\} dV =$$

$$= \int_D |\vec{u}_1 - \vec{u}_2|^2 \, dV \qquad (25)$$

λόγω της (20) (θέσατε $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $P = P_1 - P_2$). Από την (25) έπεται $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, οπότε η (24) μας δίνει $\nabla P_1 = \nabla P_2$ (δηλ. $P_1 = P_2 +$ σταθερά).

Από την (19) έχομε

$$\nabla\cdot\vec{w} = \nabla\cdot\vec{u} + \nabla\cdot(\nabla P) =$$

$$= \nabla\cdot(\nabla P) = \Delta P \quad \text{στο } D \qquad (26)$$

και

$$\vec{w}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = \vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} + \nabla P\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} =$$

$$= \partial P/\partial n\big|_{\partial D}. \qquad (27)$$

Δοθέντος του $\vec{w}$, το P ορίζεται μοναδικά (με προσέγγιση σταθεράς) από το πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Laplace

$$\Delta P = \nabla\cdot\vec{w} \ \text{ στο } D, \quad \partial_n P\big|_{\partial D} = \vec{w}\cdot\vec{n}. \qquad (28)$$

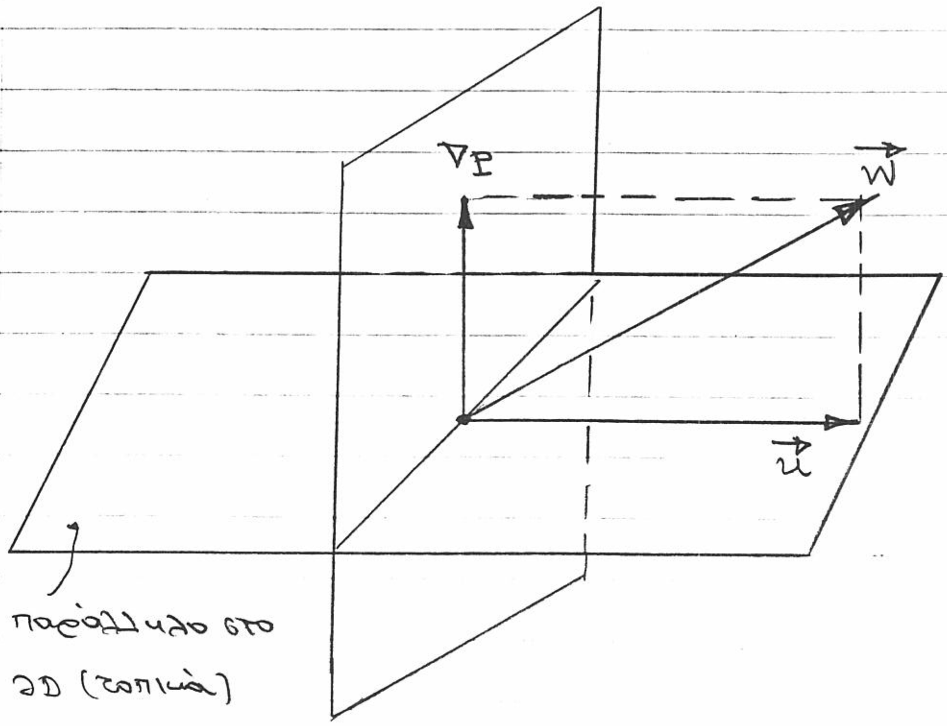
Με Φ τη λύση του προβλήματος (28), ορίζουμε

$$\vec{u} = \vec{w} - \nabla\Phi \tag{29}$$

οπότε

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\partial D} = 0 .$$

Μία γεωμετρική αναπαράσταση της (19) φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 2. Είναι φυσιολογικό να εισάγουμε τον <u>τελεστή ορθογώνιας προβολής</u> $\mathbb{P}$, τέτοιο ώστε $\vec{u} = \mathbb{P}\vec{w}$.



ΣΧΗΜΑ 2

Ο τελεστής $\mathbb{P}$ είναι εκ κατασκευής <u>γραμμικός</u>, και

$$\vec{w} = \mathbb{P}\vec{w} + \nabla\Phi . \tag{30}$$

Επίσης έχομε

$$\mathbb{P}\vec{u} = \vec{u} , \tag{31}$$

υπό την προϋπόθεση $\nabla\cdot\vec{u}=0$ και $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial D}=0$, και

$$\mathbb{P}(\nabla p)=0. \tag{32}$$

Θα εφαρμόσουμε τώρα το παραπάνω θεώρημα, και τις ιδέες που απορρέουν από αυτό, γιά τις εξισώσεις Navier-Stokes. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\mathbb{P}$ στις εξισώσεις (8) έχομε

$$\mathbb{P}(\partial_t\vec{u}+\nabla p)=\mathbb{P}\left(-(\vec{u}\,\nabla)\vec{u}+\frac{1}{R}\Delta\vec{u}\right). \tag{33}$$

Υποθέτοντας ότι η ροή είναι ασυμπίεστη ($\nabla\cdot\vec{u}=0$), και $\vec{u}|_{\partial D}=\vec{0}$ (οπότε και $(\partial_t\vec{u})|_{\partial D}=\vec{0}$ εάν το $\vec{u}$ είναι επαρκώς ομαλό) έχομε

$$\mathbb{P}(\partial_t\vec{u})=\partial_t\vec{u} \tag{34}$$

και επειδή $\mathbb{P}(\nabla p)=0$, από την (33) παίρνομε

$$\partial_t\vec{u}=\mathbb{P}\left(-\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}+\frac{1}{R}\Delta\vec{u}\right). \tag{35}$$

N.B. Παρά το γεγονός ότι $\nabla\cdot(\Delta\vec{u})=0$, το $\Delta\vec{u}$ δέν είναι κατ' ανάγκη παράλληλο στο ∂D, και συνεπώς δεν ισχύει ότι $\mathbb{P}(\Delta\vec{u})=0$.

Στη μορφή (35) των εξισώσεων Navier-Stokes έχει απαλοιφεί η πίεση, και η χρονική παράγωγος $\partial_t\vec{u}$ έχει εκφρασθεί μόνο συναρτήσει του $\vec{u}$. Εάν έχουμε υπολογίσει την ταχύτητα $\vec{u}$ η πίεση μπορεί να υπολογισθεί ως η δεύτερη συνιστώσα (gradient) στην αποσύνθεση Helmholtz-Hodge του πεδίου

$$-\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \frac{1}{R}\Delta\vec{u}.$$

Η μορφή (35) των εξισώσεων Navier-Stokes είναι σημαντική γιά την κατανόηση του ρόλου της πίεσης, αλλά είναι επίσης σημαντική γιά την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων.

Η πίεση σε μία συμπιεστή ροή είναι ουσιωδώς διαφορετική (από την άποψη της μηχανικής των συνεχών μέσων) από εκείνη της ασυμπίεστης ροής συνεκτικού ρευστού, όπως ακριβώς και στην περίπτωση ιδεατού ρευστού. Εάν σκεφτούμε τη συνεκτική ροή ως ροή ιδανικού ρευστού με υπέρθεση φαινομένων συνεκτικότητας, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η πίεση P είναι και πάλι συνάρτηση της πυκνότητας ρ. Όμως πρέπει να επισημάνουμε το εξής γεγονός. Οι εξισώσεις $P = P(\rho)$ που χρησιμοποιούνται συνήθως στις εφαρμογές (εξισώσεις κατάστασης) προέρχονται από την θερμοδυναμική ισορροπίας (equilibrium thermodynamics). Δεν είναι προφανές ότι η πίεση που "ορίζεται" από τη σχέση (1), σελ. 4.2, ταυτίζεται με την πίεση που προτείνει η Θερμοδυναμική. Η χρήση των εκφράσεων που προτείνει η Θερμοδυναμική απαιτεί περαιτέρω φυσική τεκμηρίωση, η οποία πολλές φορές είναι κριτική, αλλά σε καμμία περίπτωση δεν πρέπει να αμελείται.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε μέχρι τώρα, η πίεση P σε μία ασυμπίεστη ροή ορίζεται από την εξίσωση συνέχειας $\nabla\cdot\vec{u} = 0$. Γιά να καταλάβουμε γιατί αυτό είναι φυσικά συνεπές, θεωρούμε μία συμπιεστή ροή με $P = P(\rho)$, όπου $P'(\rho) > 0$. Εάν θεωρήσουμε εισροή ρευστού σ' ένα καθορισμένο όγκο V, η πυκνότητα θα αυξάνει και συνεπώς θα αυξάνει και η πίεση εντός του V. Εάν είτε η μεταβολή του ρ είναι μεγάλη, είτε το P'(ρ) είναι μεγάλο, το διάνυσμα $-\nabla P$ στο σύνορο ∂V θα διευθύνεται προς το εξωτερικό του V, και λόγω του όρου $-\nabla P$ στην εξίσωση γιά το $\partial_t \vec{u}$ θα έχουμε τάση εκροής του ρευστού από το V. Υπό την έννοια αυτή η πίεση ελέγχει και εξισσοροπεί τις μεταβολές πυκνότητας. Εάν θα πρέπει η πυκνότητα να παραμένει σταθερή, αυτό απαιτεί κατάλληλη πίεση, δηλ. το $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ορίζει την P.

4.4. Οι εξισώσεις Stokes

Στις εξισώσεις Navier-Stokes γιά ασυμπίεστη συνεκτική ροή,

$$\boxed{\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\nabla)\vec{u} = -\nabla P + \frac{1}{R}\Delta\vec{u}, \qquad (36)}$$

ονομάζουμε το

$\frac{1}{R}\Delta\vec{u}$ όρο διάχυσης (η απορρόφησης)

και το

$(\vec{u}\nabla)\vec{u}$ όρο αδράνειας (η μεταγωγής).

Οι εξισώσεις (36) λένε ουσιαστικά ότι η ταχύτητα $\vec{u}$ μεταγάγεται υπό την επίδραση των δυνάμεων πίεσης, και ταυτόχρονα διαχέεται.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο αριθμός Reynolds R είναι πολύ μικρός. Εάν γράψουμε τις (36) στη μορφή

$$\partial_t \vec{u} = \mathbb{P}\left(-\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \frac{1}{R}\Delta\vec{u}\right)$$

μπορούμε να τις προσεγγίσουμε με τις

$$\partial_t \vec{u} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{R}\Delta\vec{u}\right)$$

μικρές δυνάμεις αδράνειας σε σχέση με τη δύναμη συνεκτικότητας $O(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) << \nu\Delta\vec{u}$

δηλ.

για μικρά R αποδεικνύεται ότι καλή προσέγγιση είναι:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \partial_t \vec{u} &= -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta\vec{u} \\ \nabla\cdot\vec{u} &= 0 \end{aligned}\right\}} \qquad (37)$$

Οι εξισώσεις (37) είναι γνωστές ως εξισώσεις Stokes για ασυμπίεστη ροή, και είναι εξισώσεις παραβολικού τύπου. ("διώχνοντας" το ∇p έχουμε την εξίσωση θερμότητας)

Για μικρούς αριθμούς Reynolds (δηλ., μικρές ταχύτητες (αργές ροές), η μεγάλη τιμή του συντελεστού συνεκτικότητας, η ροή γύρω από σώματα μικρών διαστάσεων), η λύση των εξισώσεων Stokes είναι μία καλή προσέγγιση για τη λύση των εξισώσεων Navier-Stokes. Στη συνέχεια θα ενδιαφερθούμε κυρίως για ροές σε μεγάλους Reynolds, όπου ο όρος αδράνειας είναι σημαντικός και "με κάποια έννοια" κυρίαρχος. Η δήλωση "με κάποια έννοια" σχετίζεται με το ότι ανεξάρτητα του πόσο μικρός είναι ο όρος διάχυσης $\frac{1}{R}\Delta\vec{u}$, μπορεί να έχει σημαντική επίδραση όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, από $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial D} = 0$ όταν απουσιάζει, σε $\vec{u} = \vec{0}$ όταν είναι παρών.

$R = UL/\nu$

μόνο σχέσεις (38) – (43)

4.5. Ενεργειακή θεώρηση της συνεκτικής ροής

Υπάρχει ασφαλώς μία πολύ σημαντική διαφορά ως προς την ενέργεια μεταξύ των ιδανικών και των συνεκτικών ροών. Οι όροι συνεκτικότητας στις εξισώσεις κίνησης συναρτώνται με μηχανισμούς οι οποίοι μπορούν να μετατρέψουν τη μακροσκοπική ενέργεια (κινητική και δυναμική) σε εσωτερική. Γενικές αρχές της Θερμοδυναμικής απαιτούν ότι μία τέτοια μετατροπή ενέργειας δεν είναι αντιστρεπτή διαδικασία.

Ειδικότερα, γία ασυμπίεστη ροή θα έπρεπε

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_{kin} \leq 0.} \tag{38}$$

Ας υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας γία μία ασυμπίεστη συνεκτική ροή, με χρήση του θεωρήματος μεταφοράς. Απο την 2(32), σελ. 2.14,

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_D \rho |\vec{u}|^2 dV = \int_D \rho \vec{u} \cdot \frac{D\vec{u}}{Dt} dV =$$

$$= \int_D \left(-\vec{u} \cdot \nabla p + \frac{1}{R} \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \right) dV, \tag{39}$$

με χρήση της (36) και του $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Επειδή το $\vec{u}$ είναι ορθογώνιο στο ∇p, από την (39) παίρνομε

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \frac{1}{R} \int_D \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \, dV. \tag{40}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla\cdot(f\vec{g}) = f\,\nabla\cdot\vec{g} + \vec{g}\cdot\nabla f$$

έχομε

$$\nabla\cdot(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) = \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{u}\cdot\Delta\vec{u}. \qquad (41)$$

Από τις (40) και (41), με χρήση του θεωρήματος απόκλισης και της οριακής συνθήκης $\vec{u}|_{\partial D} = \vec{0}$, παίρνουμε τελικά

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = -\mu\int_D |\nabla\vec{u}|^2\,dV \qquad (42)$$

όπου

$$|\nabla\vec{u}|^2 = \nabla\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2.$$

Οι (38) και (42) είναι συμβιβαστές εάν $\mu \geq 0$ (η ισοδύναμα, $\nu \geq 0$ η $0 < R \leq \infty$).

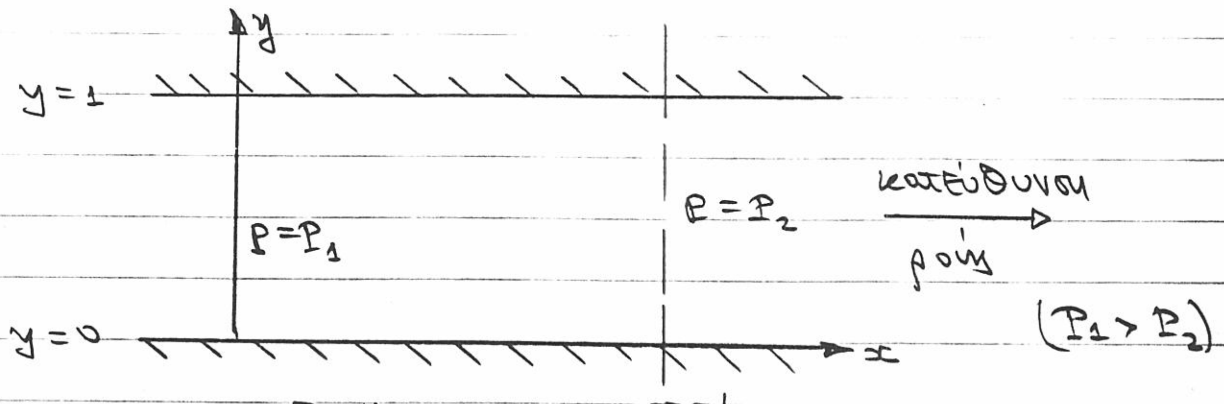
Μια όμοια ανάλυση γιά συμπιεστή ροή οδηγεί στις συνθήκες

$$\boxed{\mu \geq 0 \quad \text{και} \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0} \qquad (43)$$

γιά τον τανυστή τάσεων που εκφράζεται από την (5).

Το παράδειγμα της σελ. 2.24 γιά τη ροή ιδανικού ρευστού σε κανάλι σταθερής διατομής υποδεικνύει ότι η απουσία συνεκτικότητας οδηγεί σε μη φυσιολογικά αποτελέσματα (παράδοξα), όπως ότι είναι δυνατόν η ροή να επιταχύνεται συνεχώς. Θα δούμε τώρα ότι αυτό μπορεί να αρθεί εάν θεωρήσουμε το ρευστό συνεκτικό.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη μόνιμη ροή ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων επίπεδων τοίχων (ΣΧΗΜΑ 3).



ΣΧΗΜΑ 3

$$\vec{u}(x,y) = (u(x,y), 0) \quad , \quad P = P(x)$$

ασυμπίεστες Navier-Stokes:

$$\partial_x u = 0 \qquad (44)$$

$$-u\partial_x u - \partial_x P + \frac{1}{R}\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0 \qquad (45)$$

(επειδή $v=0 \Rightarrow \partial_y P = 0$)

οριακές συνθήκες:

$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \qquad (46)$$

Από την (44) παίρνουμε

$$u(x,y) = u(y) \qquad (47)$$

οπότε η (45) δίνει

$\longrightarrow p = f(y)x + p_0$
αδύνατον γιατί πρέπει $\partial_y p = 0$

$$\partial_x p = \overbrace{\frac{1}{R}\,\partial_y^2 u}^{f(y)\,=} . \qquad (48)$$

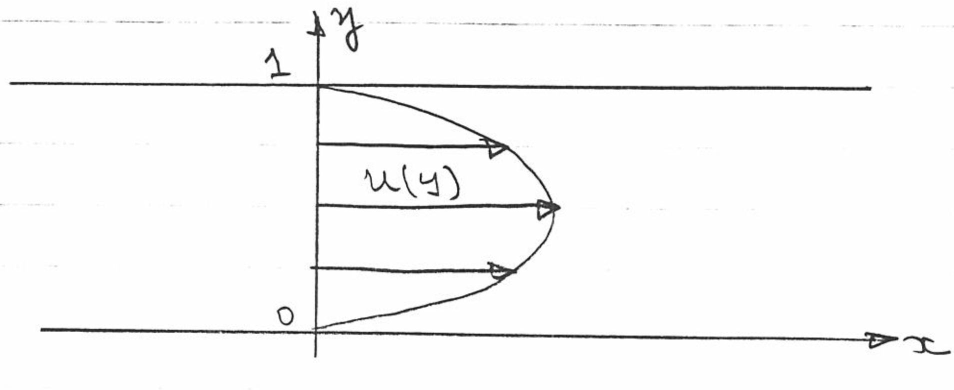
Επειδή το αριστερό μέλος της (48) εξαρτάται από το x και το δεξιό από το y, έχομε

$$\partial_x p = \text{σταθ.} \quad \text{και} \quad \frac{1}{R}\,\partial_y^2 u = \text{σταθ.} \qquad (49)$$

Οι λύσεις των (49) είναι

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= p_1 - \frac{\Delta p}{L}\,x , \quad \Delta p = p_1 - p_2 \\ u(y) &= y(1-y)\,R\,\frac{\Delta p}{L} \end{aligned}\right\} . \qquad (50)$$

Η κατανομή της ταχύτητος u φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 4.



ΣΧΗΜΑ 4

Η παρουσία της συνεκτικότητος επιτρέπει την εξισορρόπηση των δυνάμεων πίεσης (της κλίσης πίεσης) από τον όρο διάχυσης $\frac{1}{R}\partial_y^2 u$, και έτσι η ροή μπορεί να "φτάσει" σε μία μόνιμη κατάσταση. Τούτο δεν είναι εφικτό για ιδανικό ρευστό.

4.6. Στροβιλότητα σε ασυμπίεστη συνεκτική ροή

Γιά ισεντροπική ροή ιδανικού ρευστού σε δύο διαστάσεις έχομε αποδείξει (σελ. 3.18) ότι $D\xi/Dt = 0$. Οι σχετικοί υπολογισμοί μπορούν εύκολα να επαναληφθούν γιά ασυμπίεστη συνεκτική ροή (άσκηση), και το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{1}{R}\Delta\xi. \tag{51}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η στροβιλότητα διαχέεται από τη συνεκτικότητα καθώς μεταφέρεται με τη ροή. Εάν εισάγομε πάλι τη συνάρτηση ροής $\psi(x,y,t)$ βάσει του 2(43), σελ. 3.19, από τη συνθήκη μη ολίσθησης: $\vec{u}|_{\partial D} = \vec{0}$, έχομε

$$\partial_x\psi = 0 = \partial_y\psi \quad \text{στο} \quad \partial D \tag{52}$$

και επειδή $\psi|_{\partial D} = 0$, έχομε την επιπλέον συνθήκη γιά την ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{στο} \quad \partial D. \tag{53}$$

Η επιπλέον συνθήκη (53) είναι "κάπως περίεργη". Τούτο διότι δεν μπορούμε να την επιβάλλουμε αφού το πρόβλημα (βλ. 2(47b), 2(47c))

$$\Delta\psi = -\xi \quad \text{στο } D, \quad \psi|_{\partial D} = 0 \tag{54}$$

έχει ήδη μία ακριβώς λύση. Κατά συνέπεια δεν είναι προς το παρόν σαφές πως μπορούμε να καταλύσουμε στο σύστημα

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D\xi}{Dt} = \frac{1}{R}\Delta\xi \quad \text{στο } D \\ &\Delta\psi = -\xi \quad \text{στο } D, \quad \psi = 0 \quad \text{στο } \partial D \\ &u = \partial_y\psi \;, \quad v = -\partial_x\psi \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

κατά τρόπο συμβιβαστό. Αυτό θα εξετασθεί ενδελεχώς στο επόμενο κεφάλαιο.

Προκειμένου <u>γιά τριδιάστατες συνεκτικές ροές</u>, η εξίσωση στροβιλότητας έχει τη μορφή

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} - (\vec{\xi}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{R}\Delta\vec{\xi}\,, \qquad (56)$$

και συνεπώς η στροβιλότητα ακολουθώντας τη ροή μεταφέρεται, παραμορφώνεται και διαχέεται. Ο διαφορικός τελεστής στο αριστερό μέλος της (56) είναι γνωστός στη γλώσσα της γεωμετρίας ως <u>παράγωγος Lie</u>, και αποτελεί ένα συνδυασμό ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Η παραγωγή ενός συστήματος ανάλογου με το (55) παρουσιάζει και εδώ δυσκολίες. Ακόμη και γιά την περίπτωση της ισεντροπικής ροής έχουμε δυσκολία με τις εξισώσεις 2(49b) λόγω των οριακών συνθηκών.

<u>Σε μία συνεκτική ροή η κυκλοφορία δεν είναι ένα διατηρούμενο μέγεθος.</u> Με βάση την εξίσωση (56) θα μπορούσε κανείς να "ισχυρισθεί" πως εάν $\vec{\xi} = 0$ γιά $t = 0$, τότε $\vec{\xi} = 0$ γιά όλους τους χρόνους. Αυτό

Δεν είναι όμως αληθές διότι: μία συνεκτική ροή επιτρέπει την ανάπτυξη στροβιλότητος, και αυτό είναι δυνατό λόγω της διαφοράς στις συνοριακές συνθήκες που έχομε μεταξύ ιδανικής και συνεκτικής ροής. Ο μηχανισμός ανάπτυξης στροβιλότητος θα εξετασθεί στο έκτο κεφάλαιο (περί οριακού στρώματος).

4.7. Μερικά σχόλια για την υπόθεση ασυμπιεστότητος

Θα δώσουμε τώρα μία ευρετική προσέγγιση για το πότε η υπόθεση ασυμπιεστότητος είναι επαρκής και για το πότε θα πρέπει να χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις συμπιεστής ροής. Για απλότητα υποθέτουμε ότι έχομε μόνιμη ισεντροπική ροή. Εστω ότι η εξίσωση καταστάσεως είναι

$$P = P(\rho), \qquad P'(\rho) > 0. \tag{57}$$

Ορίζουμε ως (ταχύτητα ήχου στο ρευστό)

$$c = \sqrt{P'(\rho)} \tag{58}$$

οπότε

$$c^2 \, d\rho = dP. \tag{59}$$

Εάν $u = |\vec{u}|$, ορίζομε τον (τοπικό) αριθμό Mach της ροής

$$M = u/c \tag{60}$$

ο οποίος είναι συνάρτηση της θέσεως στο πεδίο ροής. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bernoulli (σελ. 2.23) έχομε

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho(P)} = \text{σταθ. πάνω σε μία γραμμή ροής.} \qquad (61)$$

Από την εξίσωση συνέχειας 2(36), σελ. 2.16, διαφορίζοντας κατά μήκος μιας γραμμής ροής έχομε

$$0 = J d\rho + \rho dJ \qquad (62)$$

όπου J είναι η Ιακωβιανή της απεικόνισης ροής. Από τις (60), (61) και (62) παίρνομε

$$\frac{dJ}{J} = -M \frac{du}{c}. \qquad (63)$$

Η ροή θα είναι κατά προσέγγιση ασυμπίεστη, εάν το J μεταβάλλεται λίγο κατά μήκος της γραμμής ροής. Συνεπώς, μία μόνιμη ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη εάν

$$u \ll c, \text{ δηλ. } M \ll 1 \qquad (64)$$

η εάν οι μεταβολές ταχύτητος κατά μήκος μιας γραμμής ροής είναι πολύ μικρές σχετικά με την ταχύτητα του ήχου.

<u>Παράδειγμα:</u> Ιδανικό αέριο

$$P(\rho) = A\rho^\gamma, \quad A > 0, \quad \gamma > 1$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

ροή ασυμπίεστη εάν γ = πολύ μεγάλο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

5. Αστρόβιλο πεδίο ροής. Μιγαδικά δυναμικά

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 95

Γ.Ν. Μακράκης

Σκοπός του παρόντος και του επομένου κεφαλαίου είναι να διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ ιδανικής και συνεκτικής ροής. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρκετά συστηματικά ιδανικές αστρόβιλες ροές (δυναμικές ροές), ενώ στο επόμενο θα ασχοληθούμε με τη θεωρία του οριακού στρώματος, όπου αναπτύσσονται οι κύριες διαφορές μεταξύ ιδανικής και ασθενώς συνεκτικής ροής.

5.1. Δυναμικές ροές

Όλες οι ροές που θα μελετηθούν στην παράγραφο αυτή είναι ιδανικές. Ειδική έμφαση θα δοθεί σε ασυμπίεστες ροές.

Μία ροή θα ονομάζεται <u>αστρόβιλη</u> εάν η στροβιλότητα είναι μηδέν παντού στο πεδίο ροής. Γιά ιδανικές ροές το πεδίο παραμένει αστρόβιλο σε κάθε χρονική στιγμή εάν είναι αστρόβιλο τη χρονική στιγμή $t=0$. Τούτο είναι συνέπεια του πορίσματος (διατήρησης στροβιλότητας) στη σελ. 3.9. Μία ιδανική ροή, η οποία είναι αστρόβιλη θα ονομάζεται <u>δυναμική ροή</u>.

Υπενθυμίζεται ότι ένα <u>χωρίο D</u> είναι <u>απλά συνεκτικό</u> εάν μία συνεχής κλειστή καμπύλη στο D μπορεί να παραμορφωθεί κατά συνεχή τρόπο σ' ένα σημείο παραμένοντας στο D. Επί παραδείγματι, το εξωτερικό μίας σφαίρας στο χώρο είναι απλά συνεκτικό χωρίο, αλλά το εξωτερικό ενός δίσκου στο επίπεδο δεν είναι.

Γιά μία <u>αστρόβιλη ροή</u> σ' ένα <u>απλά συνεκτικό χωρίο D</u>, υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\vec{x},t)$, $\vec{x}\in D$, τέτοια ώστε <u>$\vec{u}=\nabla\varphi$</u> γιά κάθε t. Η συνάρτηση φ ονομάζεται (βαθμωτό) <u>δυναμικό ταχύτητας</u>.

Ειδικότερα, έπεται ότι η κυκλοφορία κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης C στο D είναι μηδέν. Με χρήση της ταυτότητας

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{1}{2}\nabla(|\vec{u}|^2) - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}), \qquad (1)$$

οι εξισώσεις ισεντροπικής (σελ. 2.22) δυναμικής ροής παίρνουν τη μορφή

$$\partial_t\vec{u} + \frac{1}{2}\nabla(|\vec{u}|^2) = -\nabla i \qquad (2)$$

όπου i είναι η ενθαλπία. Θέτοντας στη (2), $\vec{u}=\nabla\varphi$, παίρνομε

$$\nabla\left(\partial_t\varphi + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i\right) = 0 \qquad (3)$$

και συνεπώς

$$\partial_t\varphi + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i = \text{σταθ. στο } D. \qquad (4)$$

Ειδικότερα, εάν η ροή είναι <u>μόνιμη</u>

$$\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i = \text{σταθ. στο } D. \qquad (5)$$

Για τις (4) και (5) η συνθήκη απλής συνεκτικότητας του D δεν είναι αναγκαία. Το θεώρημα Bernoulli (σελ. 2.23) μας λέει ότι η ποσότητα $\frac{1}{2}|\vec{u}|^2 + i =$ σταθ. κατά μήκος των γραμμών ροής. Το ισχυρότερο συμπέρασμα (5) είναι αποτέλεσμα της επιπλέον υπόθεσης της αστροβιλότητας $\vec{\xi}=\vec{0}$.

*

N.B. Για δυναμική ροή σε ένα χωρίο D το οποίο δεν είναι απλά συνεκτικό, είναι δυνατόν η κυκλοφορία Γ_C κατά μήκος κλειστής καμπύλης C να μην είναι μηδέν. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το πεδίο ταχύτητας

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

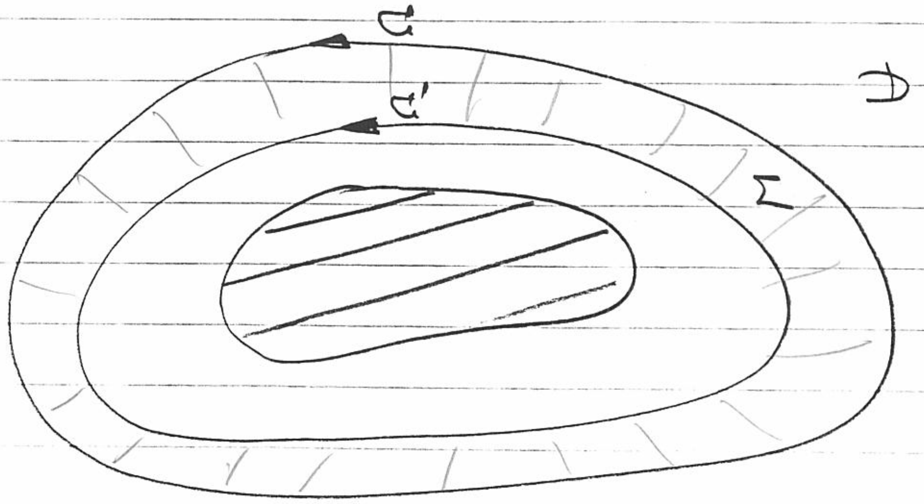
$\vec{u} = \left(-\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\cos\theta}{r}\right)$

$$\vec{u} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

$\partial_y\psi \qquad -\partial_x\psi \Rightarrow \psi(x,y) = -\int \frac{y\,dy}{x^2+y^2} + f(x) = -\ln(x^2+y^2)$

$\oint \vec{u}\cdot d\vec{s} = \int \frac{1}{r}\, r\, d\theta = 2\pi$

Εάν η καμπύλη C μπορεί να μετασχηματισθεί συνεχώς εντός του D στην C' (ΣΧΗΜΑ 1), τότε $\Gamma_C = \Gamma_{C'}$.



ΣΧΗΜΑ 1

Ο λόγος είναι ότι το $C \cup C'$ είναι το σύνορο του Σ στο D. Από το Θεώρημα Stokes έχομε

$$\iint_\Sigma \vec{\xi}\cdot d\vec{A} = \int_C \vec{u}\cdot d\vec{s} - \int_{C'} \vec{u}'\cdot d\vec{s} = \Gamma_C - \Gamma_{C'}$$

και επειδή $\vec{\xi} = \vec{0}$ στο D, έπεται $\Gamma_C = \Gamma_{C'}$. Όμως η κυκλοφορία κατά μήκος της C είναι σταθερή ως προς το χρόνο, οπότε, η κυκλοφορία γύρω από ένα στερεό σύνορο στο επίπεδο είναι καλώς ορισμένη και ανεξάρτητη του χρόνου.

Θα θεωρήσουμε τώρα ασυμπίεστη δυναμική ροή σ' ένα απλά συνεκτικό χωρίο. Από τις συνθήκες $\vec{u} = \nabla\varphi$ και $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ παίρνομε ότι

$$\Delta\varphi = 0. \tag{6}$$

Εάν $\vec{u}|_{\partial D} = \vec{V}$ είναι η (δοσμένα) ταχύτητα του συνόρου του D, το φ είναι λύση του ακόλουθου προβλήματος Neumann για την εξίσωση Laplace

$$\Delta\varphi = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{V}\cdot\vec{n} \tag{7}$$

όπου $\vec{n}$ είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα επί του συνόρου ∂D. Συνεπώς, εάν φ είναι λύση του προβλήματος (7), το πεδίο ταχύτητος $\vec{u} = \nabla\varphi$ είναι μόνιμη λύση των ομογενών εξισώσεων Euler

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\nabla(|\vec{u}|^2) \overset{\nabla\times\vec{u}=\vec{0}}{=} \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} &= -\nabla P \\ \nabla\cdot\vec{u} &= 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial D} &= \vec{V}\cdot\vec{n} \end{aligned}\right\} \text{στο } D \tag{8}$$

όπου $P = -\rho|\vec{u}|^2/2$, (σάν αποτέλεσμα της (1)). Επομένως, οι λύσεις του (7) βρίσκονται σε μονοσήμαντη αντιστοιχία με τις λύσεις του (8) (με φ που ορίζεται κατά προσέγγιση σταθεράς) σε απλά συνεκτικό χωρίο. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Εστω D ένα απλά συνεκτικό και φραγμένο χωρίο με δοθείσα ταχύτητα $\vec{V}$ στο ∂D. Τότε
(1) Υπάρχει ακριβώς μία δυναμική ομογενής ασυμπίεστη ροή (που ικανοποιεί τις (8)) στο D, εάν και μόνο εάν $\int_{\partial D} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$

(2) Η παραπάνω ροή ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$E_{κιν}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_D \rho|\vec{u}|^2 dV,$$

της κινητικής ενέργειας στο σύνολο

$$U = \{\vec{u}' \mid \vec{u}' \text{ ορισμένο στο } D, \nabla\cdot\vec{u}' = 0,\ \vec{u}'\cdot\vec{n}|_{\partial D} = V\cdot\vec{n}\}.$$

Απόδειξη: (1) Το πρόβλημα Neumann (7) έχει μία λύση εάν και μόνον εάν $\int_{\partial D} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$. Η μοναδικότητα του $\vec{u}$ μπορεί να αποδειχθεί απ' ευθείας και ως εξής. Εάν $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι δύο λύσεις, και φ_1, φ_2 τα αντίστοιχα δυναμικά, θέτουμε $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ και $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Τότε έχουμε

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{στο } D \tag{9a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \vec{u}_1\cdot\vec{n} - \vec{u}_2\cdot\vec{n} = 0 \text{ στο } \partial D \tag{9b}$$

και

$$\vec{u} = \nabla\varphi. \tag{9c}$$

Συνεπώς

$$\int_D \nabla\cdot(\varphi\vec{u})\,dV = \int_D \vec{u}\cdot\nabla\varphi\,dV + \int_D \varphi\,\nabla\cdot\vec{u}\,dV =$$

$$= \int_D \vec{u}\cdot\vec{u}\,dV \qquad (10)$$

και επειδή

$$\int_D \nabla\cdot(\varphi\vec{u})\,dV = \int_{\partial D} \varphi\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA = 0 \qquad (11)$$

παίρνομε

$$\int_D |\vec{u}|^2\,dV = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{u} = 0 \qquad (12)$$

οπότε $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$.

(2) Εάν $\vec{u}$ είναι λύση των (8) και $\vec{u}' \in V$, θέτομε $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}'$. Τότε $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ και $\vec{v}\cdot\vec{n}|_{\partial D} = 0$. Συνεπώς

$$E_{kin}(\vec{u}) - E_{kin}(\vec{u}') = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(|\vec{u}|^2 - |\vec{u}'|^2\right)dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_D \rho|\vec{u}-\vec{u}'|^2\,dV + \int_D \rho(\vec{u}-\vec{u}')\cdot\vec{u}\,dV \leq$$

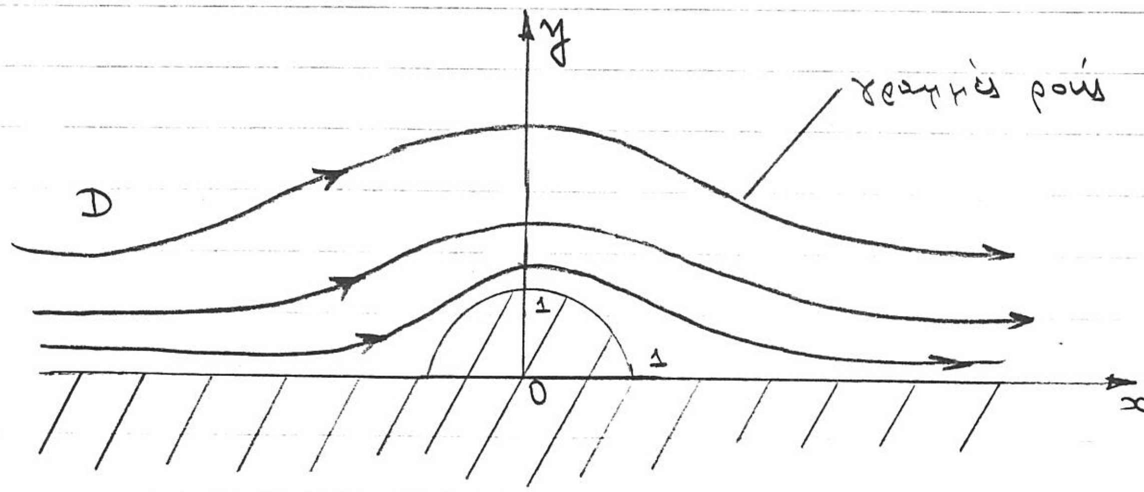
$$\leq \int_D \rho\,\vec{v}\cdot\nabla\varphi\,dV = 0 \qquad (13)$$

Η ισότητα στο τέλος της (13) απορρέει από τη συνθήκη ορθογωνιότητας 4(20), σελ. 4.11 (απόδειξη θεωρήματος Helmholtz-Hodge). ■

Πρέπει να τονίσουμε ότι η μόνη ασυμπίεστη δυναμική ροή σε ένα <u>φραγμένο χωρίο</u> με σταθερό σύνορο είναι η τετριμμένη ροή με $\vec{u} = 0$. Αντίθετα, σε <u>μη φραγμένα χωρία</u> αυτό δεν είναι αληθές, εκτός εάν απαιτήσουμε το πεδίο ταχύτητας να ικανοποιεί ειδικές συνθήκες στο άπειρο (ώστε να μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα απόκλισης). Για παράδειγμα, θεωρούμε, σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο, το δυναμικό

$$\varphi(r,\vartheta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\underbrace{\cos\vartheta}_{= x/r} = \left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)x \quad \begin{cases} u = \Phi_x = 1 + \left(\dfrac{x^2+y^2-\cancel{2}x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ v = \Phi_y = -\dfrac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

που είναι λύση του προβλήματος (7) με $\partial\varphi/\partial n = 0$ επί του μοναδιαίου κύκλου και του άξονα x (ΣΧΗΜΑ 2). Το φ αναπαριστά εν προκειμένω μία μη τετριμμένη ασυμπίεστη δυναμική ροή στο χωρίο $D = \{y \geq 0 \mid r \geq 1\}$.



ΣΧΗΜΑ 2

Οι ασυμπίεστες δυναμικές ροές, παρά το γεγονός ότι είναι πολύ ειδικές ροές, αποτελούν βασικό συστατικό για την μελέτη πιό περίπλοκων ροών. Ειδικότερα στην περίπτωση επιπέδων ροών η μελέτη μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των μεθόδων της μιγαδικής ανάλυσης.

Έστω D ένα χωρίο του επιπέδου και $\vec{u} = (u, v)$ το πεδίο ταχύτητας ασυμπίεστης ροής, οπότε

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{ή} \quad \partial_x u + \partial_y v = 0. \tag{9}$$

Εάν υποθέσουμε ότι η ροή είναι και αστρόβιλη, έχομε

$$\nabla \times \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \partial_y u - \partial_x v = 0. \tag{10}$$

Ορίζομε την μιγαδική ταχύτητα

$$F = u - iv \tag{11}$$

και παρατηρούμε ότι οι (9) και (10) είναι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann γιά την F στο D, και συνεπώς η F είναι μία αναλυτική συνάρτηση στο D. Αντίστροφα, δοθείσης μιάς αναλυτικής συνάρτησης F, οι συναρτήσεις $u = \mathrm{Re}\, F$ και $v = \mathrm{Im}\, F$ είναι οι συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας μιάς (μόνιμης) ασυμπίεστης δυναμικής ροής.

Εάν υπάρχει συνάρτηση $W(z)$, $z = x + iy$, τέτοια ώστε $F(z) = dW(z)/dz$, ονομάζουμε την W μιγαδικό δυναμικό ταχύτητας (εάν επιτρέψομε η W να είναι πλειότιμη, υπάρχει πάντοτε, αλλά μία τέτοια παραδοχή θα δημιουργούσε σημαντικές δυσκολίες στην ανάλυσή μας). Γράφομε

$$W = \varphi + i\psi, \tag{12}$$

οπότε από την (11) παίρνομε

$$u = \partial_x \varphi = \partial_y \psi \quad \text{και} \quad v = \partial_y \varphi = -\partial_x \psi , \qquad (13)$$

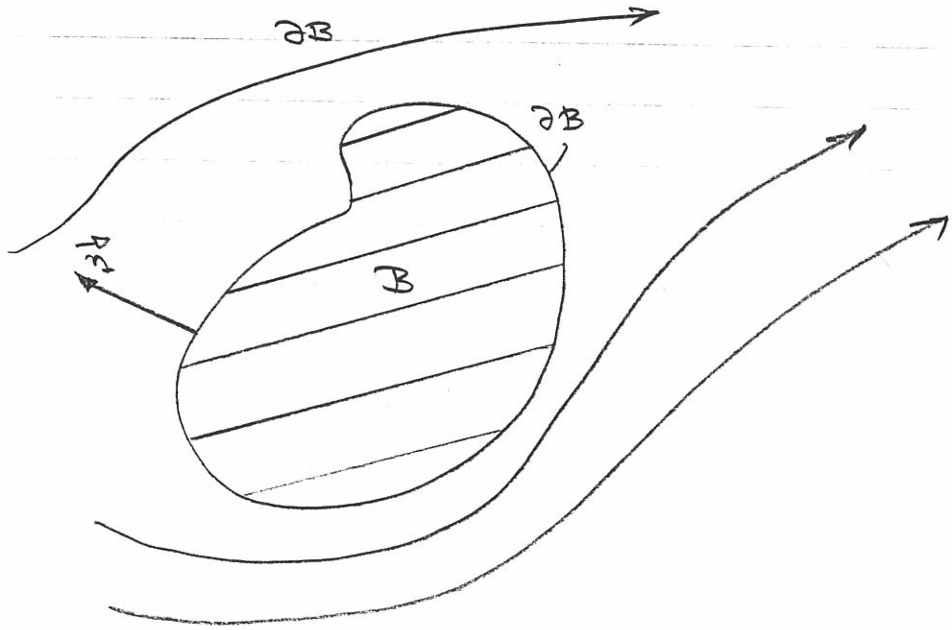
δηλ. $\vec{u} = -\nabla\varphi$. Δηλαδή φ είναι το (βαθμωτό) δυναμικό ταχύτητας και ψ η συνάρτηση ροής. Στη συνέχεια, δεν θα υποθέσουμε (και δεν πρέπει να υποθέσουμε) ότι υπάρχει (μονότιμη) συνάρτηση W ως ανωτέρω.

Θεωρούμε τη ροή στο εξωτερικό ενός στερεού συνόρου B (ΣΧΗΜΑ 3). Η δύναμη λόγω της πίεσης επί του B είναι

$$\vec{F}_B = -\int_{\partial B} p\vec{n}\, ds \qquad (14)$$

που σημαίνει ότι γιά οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα $\vec{e}$

$$\vec{F}\cdot\vec{e} = -\int_{\partial B} p\vec{n}\cdot\vec{e}\, ds.$$



ΣΧΗΜΑ 3

Η εξίσωση (14) αναλύθηκε με λεπτομέρεια στο δεύτερο κεφάλαιο. Στη συνέχεια θα παράγουμε μία έκφραση της $\vec{F}$

συναρτήσει του μιγαδικού δυναμικού ταχύτητας.

χωρίς απόδειξη

<u>Θεώρημα Blasius:</u> Σε μία ασυμπίεστη δυναμική ροή στο εξωτερικό ενός στερεού σώματος B, με μιγαδική ταχύτητα F, η δύναμη $\vec{F}_B$ επί του σώματος είναι

$$\vec{F}_B = -\frac{i\rho}{2}\,\overline{\int_{\partial B} F^2(z)\,dz} \qquad (15)$$

όπου $\bar{f}$ δηλώνει τη συζυγή συνάρτηση της f, και το διάνυσμα $\vec{F}_B$ έχει συνιστώσες το πραγματικό και φανταστικό μέρος στο δεξιό μέλος της (15).

Απόδειξη: Εάν $dz = dx + i\,dy$ είναι το στοιχείο μετατόπισης κατά μήκος του ∂B, τότε $\frac{1}{i}dz = dy - i\,dx$ είναι η μετατόπιση κάθετα στο ∂B. Από την (14) έχομε

$$\vec{F}_B = -\int_{\partial B} P\,dy + i\int_{\partial B} P\,dx = i\int_{\partial B} P(dx + i\,dy). \qquad (16)$$

Επειδή όμως

$$P = -\frac{\rho}{2}|\vec{u}|^2 = -\frac{\rho}{2}(u^2+v^2), \qquad (17)$$

η (16) γράφεται στη μορφή

$$\vec{F}_B = -\frac{i\rho}{2}\int_{\partial B}(u^2+v^2)\,dz. \qquad (18)$$

Επιπλέον έχομε

$$F^2 = (u - iv)^2 = u^2 - v^2 - 2iuv \qquad (19)$$

και

$$\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\partial B} = 0 \quad ή \quad u\,dy = v\,dx \qquad (20)$$

και συνεπώς

$$F^2 dz = (u^2 - v^2 - 2iuv)(dx + i\,dy) =$$

$$= (u^2 + v^2)(dx - i\,dy) \qquad (21)$$

Επειδή $\mathrm{Im}(u^2 + v^2) = 0$, από την (21)

$$\overline{F^2 dz} = (u^2 + v^2)\,dz. \qquad (22)$$

Οι (18) και (22) δίνουν την (15). ■

Η εξίσωση (15) γιά τη δύναμη πάνω στο στερεό σύνορο ∂B θα χρησιμοποιηθεί γιά την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

χωρίς απόδειξη

Θεώρημα Kutta-Joukowski: Σε μία ασυμπίεστη δυναμική ροή γύρω από το στερεό σώμα B, όπου το πεδίο ταχύτητας στο άπειρο προσεγγίζει τη σταθερή τιμή $\vec{U} = (U, V)$, η δύναμη επί του σώματος είναι

$$\vec{F}_B = -\rho\,\Gamma_{\partial B}\,|\vec{U}|\,\vec{n}_U, \qquad (23)$$

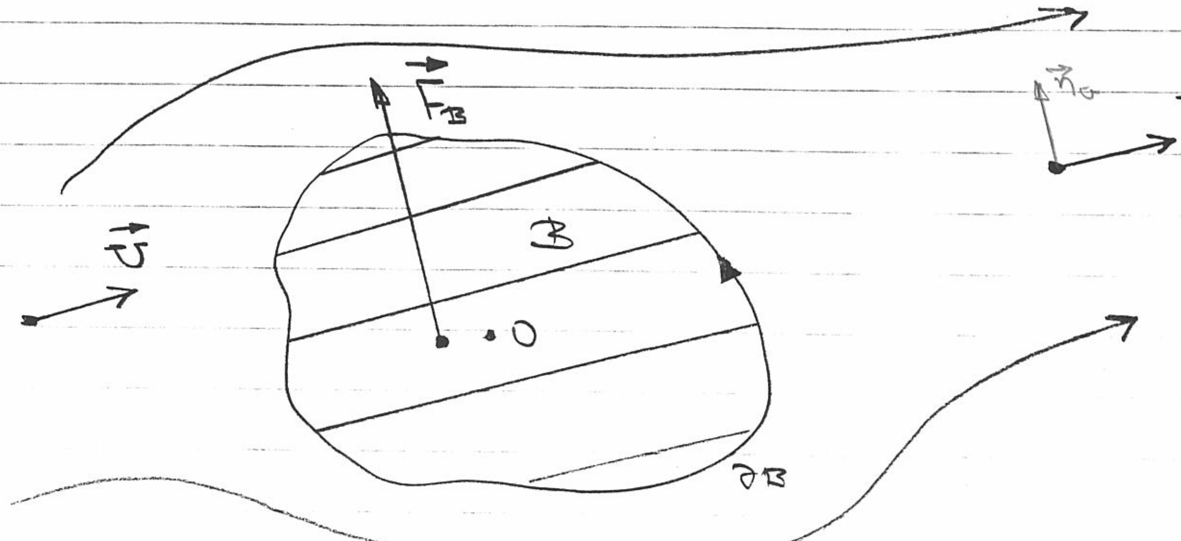
όπου $\Gamma_{\partial B}$ είναι η κυκλοφορία επί του ∂B και $\vec{n}_U$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ορθογώνιο στο $\vec{U}$ (ΣΧΗΜΑ 4).

Απόδειξη: Επειδή η μιγαδική ταχύτητα $F(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $D\ (= \mathbb{C} \setminus B)$ και $\lim_{z\to\infty} F(z)$ είναι πεπερασμένο και ίσο με $U - iV$ = σταθ., έχουμε το ακόλουθο ανάπτυγμα Laurent για την F

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \quad , \ |z| > R \qquad (24)$$

όπου $a_0 = U - iV$ και R τέτοιο ώστε

$$B \subset D_R = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \}.$$



ΣΧΗΜΑ 4

Από το Θεώρημα Cauchy

$$\int_{\partial B} F\, dz = 2\pi i\, a_1 \qquad (25)$$

Όμως

$$\int_{\partial B} F\,dz = \int_{\partial B} (u - iv)(dx + i\,dy) = \int_{\partial B} u\,dx + v\,dy =$$

$$= \int_{\partial B} \vec{u}\cdot d\vec{s} = \Gamma_c \qquad (26)$$

επειδή $u\,dy = v\,dx$ λόγω ότι $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial B} = 0$. Από τις (25) και (26) έχομε

$$a_1 = \frac{\Gamma_c}{2\pi i}. \qquad (27)$$

Από την (24) παίρνομε επίσης

$$F^2(z) = a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{z} + \frac{2a_0a_2 + a_1^2}{z^2} + \dots \qquad (28)$$

οπότε από το Θεώρημα Blasius και το Θεώρημα Cauchy έχομε

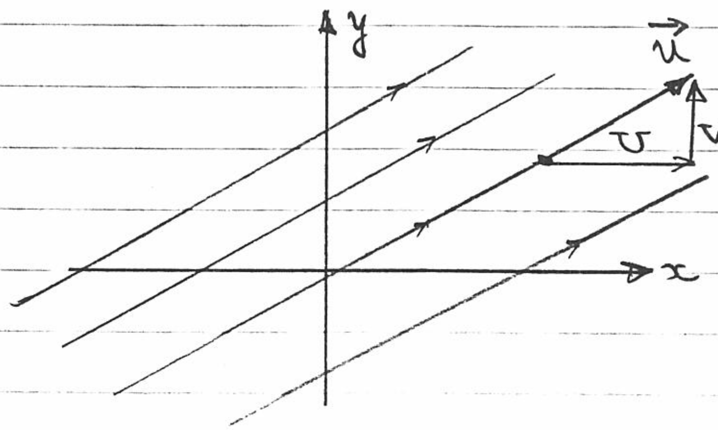
$$\vec{F}_B = -\frac{i\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} F^2\,dz} = -\frac{i\rho}{2}\overline{\left(2\pi i\cdot 2a_0a_1\right)} =$$

$$= \rho\Gamma_{\partial B}(V - iU) = -\rho\Gamma_{\partial B}|U|\vec{n}_U. \qquad \blacksquare$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Kutta-Joukowski το σώμα B δεν υπόκειται σε καμμία δύναμη αντίστασης που είναι παράλληλη με την "κατεύθυνσή" της ροής. Τούτο έρχεται σε αντίθεση με τη φυσική μας εμπειρία και οφείλεται στο ότι αγνοήσαμε τη συνεκτικότητα του ρευστού. Το αποτέλεσμα όμως (23) είναι ακόμη "χειρότερο" λόγω ότι προβλέπει μηδενική δύναμη όταν δεν έχομε κυκλοφορία γύρω από το σώμα. Αυτό είναι δύσκολο επίσης να το αποδεχθούμε διαισθητικά (παράδοξο D'Alembert).

έμφαση στα παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Εάν $a = U - iV$ είναι μία μιγαδική σταθερά, θέτομε $W(z) = az$. Η μιγαδική ταχύτητα είναι $F(z) = W'(z) = a$, οπότε το αντίστοιχο πεδίο ταχύτητας είναι $\vec{u} = (U, V) =$ σταθ. Έχομε δηλαδή ομοιόμορφη παράλληλη ροή όπως φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 5.



ΣΧΗΜΑ 5

Παράδειγμα 2: Έστω B δίσκος ακτίνας $a>0$ με κέντρο στο μηδέν του μιγαδικού επιπέδου, και

$$W(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad U > 0. \tag{29}$$

Η μιγαδική ταχύτητα είναι

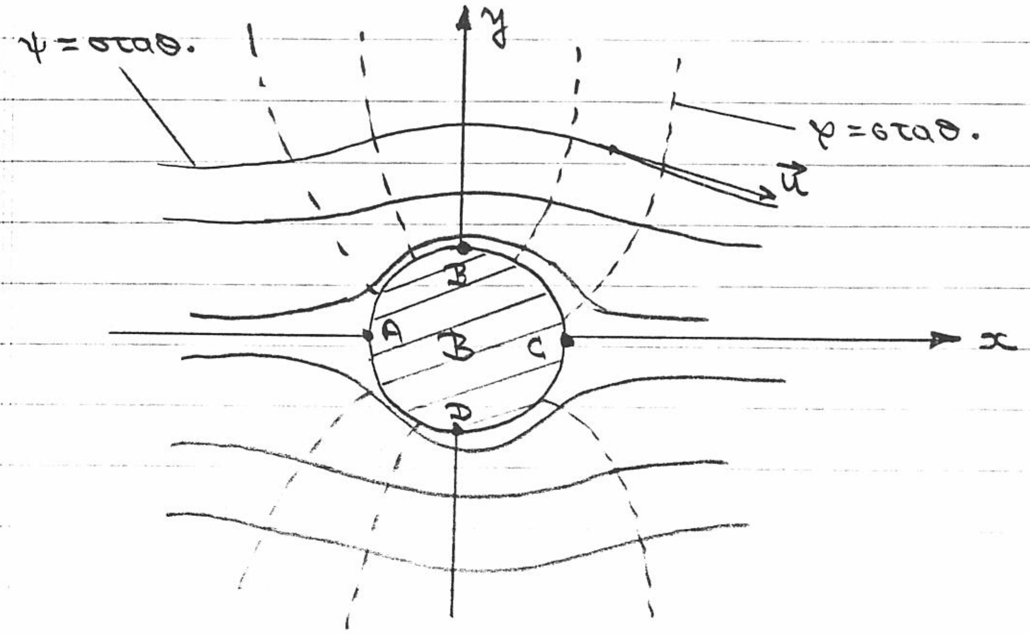
$$F(z) = W'(z) = U\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right), \tag{30}$$

και τείνει στη σταθερή τιμή U καθώς $|z| \to \infty$.

Το δυναμικό ταχύτητας φ και η συνάρτηση ροής ψ ορίζονται από τη σχέση (12), $W = \varphi + i\psi$. Για να επιβεβαιώσουμε ότι η ροή είναι εφαπτόμενη στον κύκλο $|z| = a$, πρέπει να δείξουμε ότι $\psi =$ σταθ. γιά $|z| = a$. Πράγματι έχομε $|z|^2 = z\bar{z} = a^2$, οπότε η (29) γιά $|z| = a$ παίρνει τη μορφή

$$W(z) = U(z + \bar{z})$$

δηλ. η W παίρνει πραγματικές τιμές γιά $|z| = a$, δηλ. $\psi = 0$ γιά $|z| = a$. Οι γραμμές ροής φαίνονται στο ΣΧΗΜΑ 6.



ΣΧΗΜΑ 6

Από την (30) για $z = a e^{i\theta}$, δηλ. $z \in \partial B$, παίρνομε

$$F(z) = U\left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{2i\theta}}\right) = U(1 - \cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Συνεπώς η ταχύτητα είναι μηδέν στά $C (z = a, \theta = 0)$ $A (z = -a, \theta = \pi)$ τα οποία είναι σημεία ανακοπής της ροής, και γίνεται μέγιστη στα B και D. Από το θεώ-

$\int_{C} \vec{u}\cdot ds$ $\Gamma = \int_{C} F\,dz = \int_{C} W'\,dz = W|_{C} = 0$

ρημα Bernoulli

$$P = -\frac{\rho}{2}|\vec{u}|^2 + \text{σταθ.},$$

οπότε η πίεση γίνεται μέγιστη στα A, C και ελάχιστη στα B, D. Η κυκλοφορία γύρω από το δίσκο είναι μηδενική διότι $F = W'$ και η W είναι μονότιμη.

Εάν η W είναι μία αναλυτική συνάρτηση που ορίζεται σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, τότε

$$\tilde{W}(z) = W(z) + \overline{W\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \quad |z| \geq a$$

είναι μιγαδικό δυναμικό που περιγράφει μία ροή στο εξωτερικό του κύκλου $|z| > a$, αλλά με περισσότερο περίπλοκη συμπεριφορά στο άπειρο (άσκηση).

ροή με στροβιλότητα

Παράδειγμα 3: Στο παράδειγμα της σελ. 3.22 αποδείξαμε ότι εάν ψ είναι μία τυχούσα αύξουσα συνάρτηση του r, η ροή με συνάρτηση ροής ψ είναι ασυμπίεστη με στροβιλότητα $\xi = -\Delta\psi$. Εάν μπορούμε να βρούμε μία αναλυτική συνάρτηση με φανταστικό μέρος ψ, η αντίστοιχη ροή θα είναι ασυμπίεστη και στροβιλή. Η συνάρτηση

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\log z, \quad \left(\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log r,\ r = |z|\right), \tag{31}$$

έχει την παραπάνω ιδιότητα γιατί $\log z = \log|z| + i\arg z$. Το μιγαδικό δυναμικό W δεν είναι μονότιμη συνάρτηση, αλλά η μιγαδική ταχύτητα

$$F(z) = W'(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i z} \tag{32}$$

είναι αναλυτική και μονότιμη γιά $z\neq 0$. Η κυκλοφορία σύμφωνα με την εξίσωση (26) είναι

$$\Gamma_{\partial B} = \int_{\partial B} F(z)\,dz = \frac{\Gamma}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi i}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{d(\alpha e^{i\theta})}{\alpha e^{i\theta}} = \Gamma, \text{ γιά κάθε } \alpha>0, \qquad (33)$$

ενώ η επ' άπειρον ταχύτητα είναι μηδέν.

<u>Ασκηση:</u> Να κατασκευασθεί το μιγαδικό δυναμικό γιά ασυμπίεστη δυναμική ροή γύρω από δίσκο κέντρου z_0 και ακτίνας α, με κυκλοφορία Γ $\left(\text{Απ. } W(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z-z_0)\right)$.

<u>Παράδειγμα 4:</u> Θεωρούμε την <u>επαλληλία των ροών</u> που μελετήσαμε στα παραδείγματα 2 και 3. Λόγω της γραμμικότητας το αντίστοιχο μιγαδικό δυναμικό θα είναι

$$W(z) = U\left(z+\frac{\alpha^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log z \quad , \ |z|\geq \alpha. \qquad (34)$$

Επειδή γιά κάθε μία από τις επάλληλες ροές η συνάρτηση ροής ψ είναι σταθερή γιά $|z|=\alpha$, το δυναμικό (34) αναπαριστά ασυμπίεστη ροή γύρω από το δίσκο $|z|\leq\alpha$, με κυκλοφορία Γ και επ' άπειρον ταχύτητα $(U,0)$. Στην επιφάνεια του δίσκου η ταχύτητα $\vec{u}=\nabla\varphi$ είναι <u>εφαπτόμενη</u> στο δίσκο με τιμή

$$u_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \varphi \Big|_{r=\alpha}. \qquad (35)$$

Επειδή $\varphi = \mathrm{Re}W$, οπότε

$$\varphi(r,\theta) = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}, \qquad (36)$$

έχομε

$$u_\theta = -\ 2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}. \qquad (37)$$

Τα σημεία ανακοπής της ροής είναι αυτά γιά τα οποία

$$\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi a U} \quad (\text{εάν } |\Gamma| < 4\pi a U), \qquad (38)$$

επί της επιφάνειας του δίσκου $|z| = a$ (άσκηση: Να σχεδιασθούν οι γραμμές ροής και να δειχθούν τα σημεία ανακοπής. Επίσης, να υπολογισθεί, και να σχολιασθεί από την άποψη της φυσικής, η δύναμη στο δίσκο $\vec{F}_B$.)

5.2. Το παράδοξο D' Alembert στις τρεις διαστάσεις

εχ1

Το παράδοξο D' Alembert στις τρείς διαστάσεις μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: "Σε μία μόνιμη ασυμπίεστη ροή γύρω από ένα στερεό σώμα στο χώρο, με σταθερή επ' άπειρον ταχύτητα, δεν αναπτύσσεται πάνω στο σώμα ούτε δύναμη άνωσης ούτε δύναμη αντίστασης".

Η διαφορά αυτή ανάμεσα στην τριδιάστατη ροή και στη ροή σε δύο διαστάσεις (Θεώρημα Kutta-Joukowski), είναι αποτέλεσμα του ότι το χωρίο γύρω από ένα σώμα στο χώρο είναι απλά συνεκτικό, ενώ αυτό δεν είναι αληθές στο επίπεδο. Θα δώσουμε στη συνέχεια τη βασική ιδέα γιά την απόδειξη του παράδοξου D' Alembert.

Η λύση της εξίσωσης Poisson $\Delta\varphi = -g$ στο $\mathbb{R}^3$ είναι

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{supp}\, g} \frac{g(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, dV(\vec{y}), \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^3. \qquad (39)$$

Εάν το supp g είναι φραγμένο, τότε

$$\varphi(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\vec{x}| \to \infty, \qquad (40a)$$

δηλ.

$$|\varphi(\vec{x})| \leq \frac{\text{σταθ.}}{r}, \quad r > R, \qquad (40b)$$

γιά επαρκώς μεγάλο R. Ακριβέστερα

$$\varphi(\vec{x}) \sim \frac{Q}{4\pi r}, \quad Q = \int_{\text{supp}\, g} g(\vec{y})\, dV(\vec{y}). \qquad (41)$$

Εάν $Q=0$, τότε

$$\varphi(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad (42)$$

γιατί ο πρώτος όρος στο ανάπτυγμα του $|\vec{x}-\vec{y}|^{-1}$ σε δυνάμεις του $1/r$ μηδενίζεται.

Γιά μια ασυμπίεστη δυναμική ροή υπάρχει συνάρτηση δυναμικού φ, ώστε $\vec{u} = \nabla\varphi$ (γιατί το χωρίο εξωτερικά του σώματος B είναι απλά συνεκτικό). Το δυναμικό ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα Neumann γιά την εξίσωση Laplace

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varphi(\vec{x})=0\ , \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus B \\ &\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial B}=0 \\ &\nabla\varphi\to\vec{U} \quad \text{γιά} \quad |\vec{x}|\to\infty \end{aligned}\right\}. \qquad (43)$$

Η λύση του προβλήματος (43) ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση (γιατί;)

$$\varphi(\vec{x})=\vec{U}\cdot\vec{x}+O\left(\tfrac{1}{r}\right)\ , \quad r=|\vec{x}|\to\infty. \qquad (44)$$

Ωστόσο, η συνθήκη ότι η συνολική εκροή ρευστού στο άπειρο (ανάλογη συνθήκη με την $Q=0$, που μας οδήγησε στην (42)) είναι μηδέν, δίνει

$$\varphi(\vec{x})=\vec{U}\cdot\vec{x}+O\left(1/r^2\right), \qquad (45)$$

οπότε έχομε γιά την ταχύτητα

$$\vec{u}(\vec{x})=\vec{U}+O\left(1/r^3\right)\ , \quad r\to\infty. \qquad (46)$$

Επειδή $P=-\rho|\vec{u}|^2/2$, και $|\vec{u}|^2=|\vec{U}|^2+(\vec{u}-\vec{U})(\vec{u}+\vec{U})$, έχομε γιά την πίεση

$$P=-\frac{\rho}{2}|U|^2+O\left(1/r^3\right)=P_\infty+O\left(1/r^3\right) \qquad (47)$$

Έστω Σ μία κλειστή επιφάνεια η οποία περικλείει το σώμα B. Επειδή $\left.\vec{u}\cdot\vec{n}\right|_{\partial B}=0$, και η ροή είναι μόνιμη από το Θεώρημα διατήρησης ορμής (εξίσ. 2(21), σελ. 2.11), εφαρμοσμένο για την περιοχή (W_t) μεταξύ της Σ και της ∂B, και την (14), έχομε

$$\vec{F}_B = -\int_\Sigma \left(\rho(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{u} + P\vec{n} \right) dA. \tag{48}$$

Εκλέγοντας ως $\Sigma = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x}| = R,\ R>0 \}$, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (46) και (47) στην (48), παίρνομε

$$\vec{F}_B = -\int_\Sigma \left(P_0\vec{n} + \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\vec{U} \right) dA \; +$$

$$+\, |\Sigma| \cdot O(R^{-3}) \qquad \text{γιά } R\to\infty, \tag{49}$$

όπου $|\Sigma|$ = εμβαδό της Σ, και τελικά

$$\vec{F}_B = O(R^{-1}), \quad R\to\infty, \tag{50}$$

δηλ. $\vec{F}_B = 0$. ∎

Ειδικότερα γιά τη ροή γύρω από μία σφαίρα ακτίνας $a>0$, έχομε (να γίνουν οι σχετικοί υπολογισμοί)

$$\varphi = \frac{a^3}{2r^2}\vec{U}\cdot\hat{x} + \hat{x}\cdot\vec{U}, \qquad \hat{x} = \vec{x}/|\vec{x}| \tag{51}$$

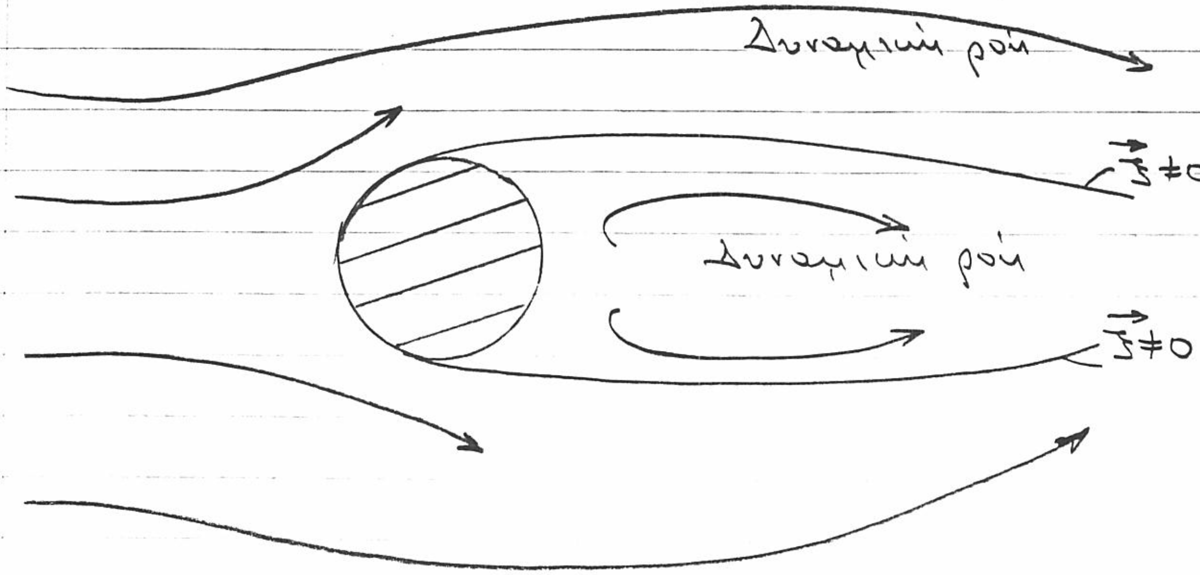
και

$$\vec{u} = \frac{a^3}{2r^2}\left[3\hat{x}(\vec{U}\cdot\hat{x}) - \vec{U} \right] + \vec{U} \tag{52}$$

όπου $\vec{U}$ είναι η επ' άπειρον ταχύτητα της ροής.

5.3. "Σχεδόν" δυναμικές ροές ^{όχι}

Με τον όρο σχεδόν δυναμική ροή εννοούμε ροές όπου η στροβιλότητα είναι συγκεντρωμένη μέσα σε λεπτά στρώματα ρευστού, και η ροή είναι δυναμική έξω από τα στρώματα αυτά, αλλά υπάρχει ταυτόχρονα και ένας μηχανισμός παραγωγής στροβιλότητας κοντά στα στερεά όρια του πεδίου ροής (π.χ. ΣΧΗΜΑ 7, όπου η στρο-



ΣΧΗΜΑ 7

βιλότητα $\vec{\zeta}$ είναι συγκεντρωμένη επί των γραμμών ροής που εκκινούν από το σώμα).

Θεωρούμε διαφορετικές δυναμικές ροές στις περιοχές που διαχωρίζονται από τις γραμμές ροής όπου έχομε μη μηδενική στροβιλότητα, και κατά μήκος των οποίων το πεδίο ταχύτητας είναι ασυνεχές. Για ένα τέτοιο μοντέλο δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Kutta-Joukowski, και η δύναμη αντίστασης είναι δυνατόν να είναι μη μηδενική. Τέτοιες καταστάσεις εμφανίζονται όταν μελετάμε τη ροή γύρω από σώματα τα οποία σχεδιάστηκαν ώστε να ελαχιστοποιείται η αντίσταση.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα μοντέλο ασυμπίεστης ιδανικής ροής η οποία είναι "σχεδόν δυναμική" και περιέχει σημειακές δίνες (βλ. Παράδειγμα 3, σελ. 5.16). Θεωρούμε ότι η στροβιλότητα της ροής είναι συγκεντρωμένη σε N δίνες (δηλ. σημεία όπου το πεδίο στροβιλότητας είναι ιδιόμορφο), στα σημεία $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ του επιπέδου. Η συνάρτηση ροής γιά την j δίνη, αγνοώντας την επίδραση των υπολοίπων, είναι

$$\psi_j(\vec{x}) = -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\log|\vec{x}-\vec{x}_j|, \tag{53}$$

όπου Γ_j είναι η κυκλοφορία της δίνης αυτής. Καθώς το ρευστό κινείται σύμφωνα με τις εξισώσεις Euler, η κυκλοφορία κάθε δίνης παραμένει σταθερή.

Η στροβιλότητα που επάγεται από την j δίνη είναι

$$\xi_j = -\Delta\psi_j = \Gamma_j\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_j), \tag{54}$$

όπου δ είναι η κατανομή Dirac. Η εξίσωση (54) είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι η συνάρτηση Green γιά τον τελεστή Laplace στο επίπεδο είναι

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{2\pi}\log|\vec{x}-\vec{x}'|,$$

δηλ., η G ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Η λύση της εξίσωσης $\Delta\psi = -\xi$ είναι

$$\psi(\vec{x}) = -\int_{\mathbb{R}^2} \xi(\vec{x}')\, G(\vec{x}, \vec{x}')\, d\vec{x}'. \tag{55}$$

Επειδή στην περίπτωση που εξετάζομε έχομε

$$\xi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j\, \delta(\vec{x} - \vec{x}_j), \tag{56}$$

η εξίσωση (55) δίνει

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(\vec{x}), \tag{57}$$

όπου

$$\psi_j(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi}\Gamma_j \log|\vec{x} - \vec{x}_j|. \tag{58}$$

Το πεδίο ταχύτητας που επάγει η j δίνη είναι

$$\vec{u}_j = (\partial_y \psi_j, -\partial_x \psi_j) = -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\left(\frac{y - y_j}{r_j^2}, \frac{x - x_j}{r_j^2}\right), \tag{59}$$

όπου $r = |\vec{x} - \vec{x}_j|$. Συνεπώς, το πεδίο ταχύτητας που επάγει η κατανομή δινών είναι

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{N} \vec{u}_j(\vec{x}, t), \tag{60}$$

όπου η ταχύτητα $\vec{u}_j$ δίνεται από την (59), και η χρονική εξάρτηση της ταχύτητας στην (60) απορρέει από την (δυνατή) κίνηση των κέντρων των δινων, οπότε $\vec{x}_j = \vec{x}_j(t)$ στη γενική περίπτωση. Οστόσο, κάθε δίνη οφείλει να κινείται κατά τρόπο συμβιβαστό με το πεδίο ταχύτητας που επάγουν οι υπόλοιπες, δηλ.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{\Gamma_i\,(y_j-y_i)}{r_{ij}^2} \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{\Gamma_i\,(x_j-x_i)}{r_{ij}^2} \end{aligned}\right\}, \qquad (61)$$

όπου $r_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$

Συνοψίζοντας την παραπάνω διαδικασία έχομε τα ακόλουθα βήματα:

(1) Επιλέγομε σταθερές $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{N}$ και αρχικά σημεία $\{\vec{x}_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ στο επίπεδο.

(2) Θεωρούμε ότι τα παραπάνω σημεία κινούνται σύμφωνα με τις εξισώσεις (61)

(3) Ορίζομε τις ταχύτητες $\vec{u}_j$ από την (59) και θέτομε $\vec{u} = -\sum_{j=1}^{N}\vec{u}_j$.

Η κατασκευή αυτή οδηγεί σε <u>φορμαλιστικές λύσεις</u> των Εξισώσεων Euler ("φορμαλιστικές" διότι το νόημα των λύσεων που συμπεριφέρονται όπως η κατανομή Dirac, για μη γραμμικές εξισώσεις δεν είναι σαφές). Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν το θεώρημα κυκλοφορίας. Εάν C_t είναι μια κλειστή καμπύλη η οποία περιέχει l δίνες $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_l$, τότε $\Gamma_c = -\sum_{i=1}^{l} \Gamma_i$, και η κυκλοφορία Γ_c παραμένει αναλλοίωτη από τη ροή.

Μια σημαντική ιδιότητα των εξισώσεων (61) είναι ότι αποτελούν Hamiltonian σύστημα. Εάν ορίσουμε τη συνάρτηση Hamilton

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \log |\vec{x}_i - \vec{x}_j| \qquad (62)$$

εύκολα βλέπουμε ότι οι (61) γράφονται στη μορφή

$$\Gamma_j \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \quad \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad (63)$$
$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές

$$x_i' = x_i |\Gamma_i|^{1/2}, \quad y_i' = y_i \,\mathrm{sgn}(\Gamma_i) |\Gamma_i|^{1/2}, \qquad (64)$$

το σύστημα (63) γράφεται στη μορφή

$$\frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i'}, \quad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i'}, \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (65)$$

Το σύστημα (65) είναι Hamiltonian, με συνάρτηση Hamilton H και γενικευμένες συντεταγμένες (x_i', y_i'). Όπως συμβαίνει και στην κλασσική μηχανική των υλικών σημείων, έχομε

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j'} \frac{dx_j'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y_j'} \frac{dy_j'}{dt} \right) = 0, \qquad (66)$$

δηλ., η συνάρτηση H είναι σταθερά της κίνησης. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι, εάν όλες οι δίνες έχουν ίδιο πρόσημο κυκλοφορίας δεν είναι δυνατόν να "συγκρουσθούν" (δηλ. αν γιά $t=0$ έχομε $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \neq 0$ γιά $i \neq j$, αυτό ισχύει γιά κάθε $t>0$, επειδή εάν $|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \to 0$, $|H| \to \infty$). Η Hamiltonian δομή του συστήματος που μελετήσαμε είναι σημαντική γιά την μελέτη της εξέλιξης και αυτοοργάνωσης του συστήματος των δινών.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία Ρευστών"

6. Οριακό στρώμα = περιοχή συναρμογής

μιάς δυναμικής ροής μακρυά από σύνορα με $\vec{u} = 0$ πάνω στα σύνορα

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

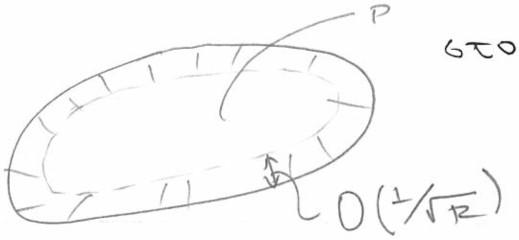
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 96

Τ. Ν. Μακράκης

6.1. Γενική Θεώρηση

Θεωρούμε τις εξισώσεις Navier-Stokes

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta\vec{u} \\ &\nabla\cdot\vec{u} = 0 \qquad\qquad \text{στο } D \\ &\vec{u}\big|_{\partial D} = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$



και υποθέτουμε ότι ο αριθμός Reynolds R έχει μεγάλη τιμή. Το ερώτημα που τίθεται στην περίπτωση αυτή, είναι πόσο διαφορετική είναι η λύση του συστήματος (1) από τη λύση των εξισώσεων Euler για ασυμπίεστη ιδανική ροή

"φορμαλιστικό" όριο $R\to\infty$

πρόβλημα ιδιόμορφων διαταραχών – μη γεωμετρικό – μη γεωμετρική WKB

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p \\ &\nabla\cdot\vec{u} = 0 \qquad\qquad \text{στο } D \\ &\vec{n}\cdot\vec{u}\big|_{\partial D} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Υποθέτομε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t=0$ οι δύο ροές ταυτίζονται και είναι αστρόβιλες ($\vec{\xi}=0$). Ισχυριζόμαστε ότι η παρουσία της (μικρής) συνεκτικότητας στον όρο $\frac{1}{R}\Delta\vec{u}$ και η διαφορά στις οριακές συνθήκες, έχουν ως αποτέλεσμα τα ακόλουθα:

1. Η ροή (2) είναι σημαντικά διαφορετική από την ροή (1) κοντά στο σύνορο ∂D του πεδίου ροής και εντός στρώματος πάχους ανάλογου του $1/\sqrt{R}$.
2. Το στρώμα αυτό είναι δυνατόν να αποκολληθεί από το σύνορο ∂D.
3. Η αποκόλληση αυτή είναι αίτιο παραγωγής στροβιλότητας

Kevorkian-Cole: Perturbation methods in Applied Math

M. van Dyke: Perturbation methods in Fluid Mechanics

Ενώ το πάχος του στρώματος καθίσταται οσοδήποτε μικρό καθώς $R \to \infty$, τα φαινόμενα 2 και 3 καθιστούν την επίδραση του στρώματος μη αμελητέα στο όριο $R \to \infty$.

Έννοια οριακού στρώματος

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{dy(x)}{dx} = a \, , \quad y(1) = 1 \tag{3}$$

όπου $a =$ σταθ. και $0 < x < 1$. Η λύση της (3) είναι

$$y(x) = a(x-1) + 1 .$$

"Εμπλουτίζομε" τώρα την (3) με ένα όρο τριβής και επιβάλλομε μια δεύτερη οριακή συνθήκη

$$\epsilon \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a \, , \quad y(0) = 0 \, , \quad y(1) = 1 . \tag{4}$$

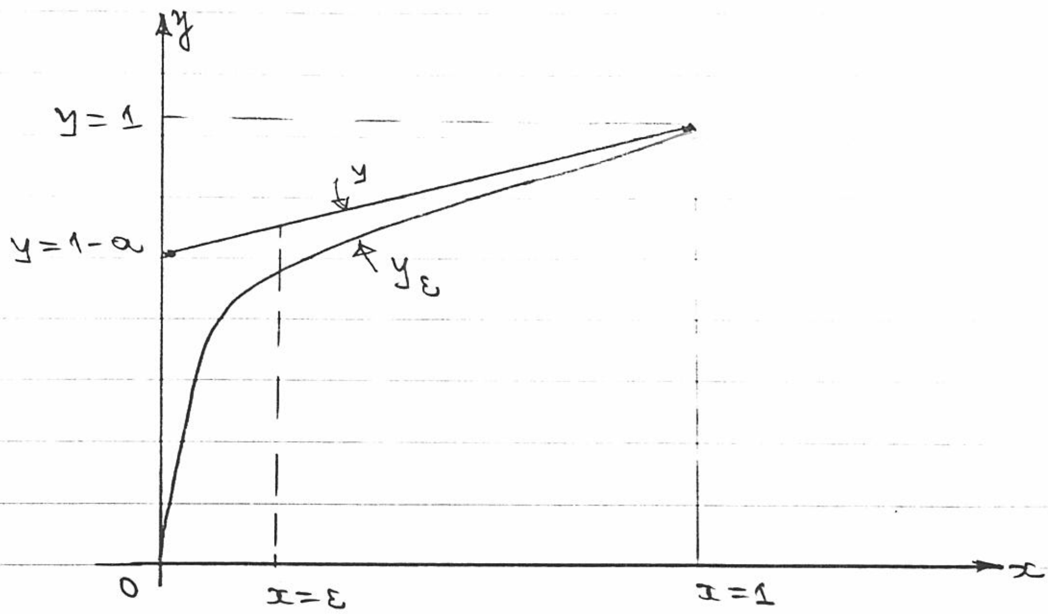
Όπως συμβαίνει και με τις εξισώσεις (1), (2) οι (3) και (4) διαφέρουν κατά ένα όρο όπου μια μικρή σταθερά πολλαπλασιάζει την υψηλότερης τάξης παράγωγο, και βέβαια έχομε την αναγκαστική προσθήκη μιάς ακόμα οριακής συνθήκης. Η λύση της (4) είναι

$$y_\epsilon(x) = \frac{1-a}{1 - e^{-1/\epsilon}} \left(1 - e^{-x/\epsilon}\right) + ax .$$

$e^{-x/\epsilon} =$ μικρό | $e^{-1/\epsilon} =$ μικρό

$y_\epsilon \simeq y$

Γιά $0 < a < 1$ οι δύο λύσεις φαίνονται στο ΣΧΗΜΑ 1. Γιά $\epsilon =$ μικρό και $x > \epsilon$ οι δύο λύσεις βρίσκονται αρκετά κοντά (άσκηση: να εκτιμηθεί η διαφορά $y - y_\epsilon$ γιά $x > \epsilon$), και διαφέρουν σημαντικά στο διάστημα

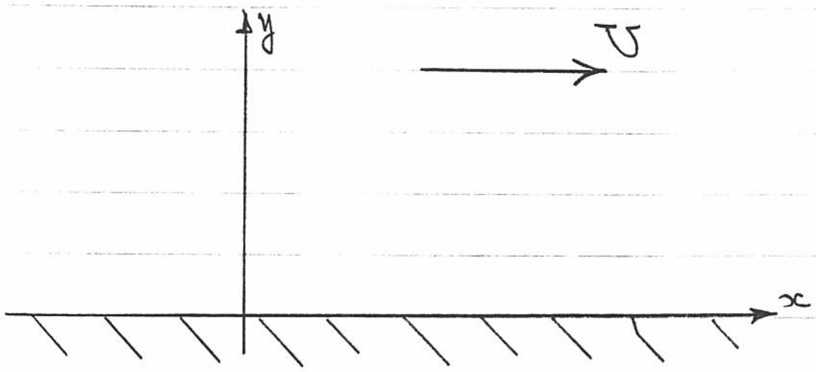


ΣΧΗΜΑ 1

$[0, \varepsilon]$ το οποίο ονομάζομε οριακό στρώμα. Πρέπει να σημειωθεί ότι καθώς $\varepsilon \to 0$, το οριακό στρώμα συρρικνούται αλλά η μέγιστη μεταξύ των y και y_ε παραμένει σταθερή.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1. Στη συνέχεια θεωρούμε μία περίπτωση όπου οι (1) και (2) μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά και το οριακό στρώμα ορίζεται επίσης αναλυτικά.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε διδιάστατη ροή στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$ και υποθέτομε ότι το σύνορο $y = 0$ είναι στερεό και η ταχύτητα ροής για $y = \infty$ παράλληλη με τον άξονα x και μέτρο U (ΣΧΗΜΑ 2). Συνεπώς, ζητάμε λύση του συστήματος (1) με $\vec{u} = (u(y,t), 0)$ και σταθερή πίεση (δηλ. $\nabla p = 0$). Η αντίστοιχη λύση των εξισώσεων Euler (2) είναι $\vec{u} = (U, 0)$.



ΣΧΗΜΑ 2

Οι κατάλληλες οριακές συνθήκες για το (1) είναι

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\infty,t) = U .$$

Επιπλέον έχομε

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = (u\partial_x + v\partial_y)\vec{u} = u\,\partial_x\left(u(y,t),0\right) = 0$$

και συνεπώς η (1) παίρνει τη μορφή

Εξίσωση θερμότητας

$$\partial_t u = \nu\,\partial_y^2 u \quad , \quad \nu = 1/R . \tag{5}$$

Εάν L, T είναι οι κλίμακες μήκους και χρόνου του προβλήματος, ο μετασχηματισμός

$$y' = y/L \quad , \quad t' = t/T$$

μετασχηματίζει την (5) στη μορφή

$$\partial_{t'} u = \frac{\nu L^2}{T}\,\partial_{y'}^2 u \tag{6}$$

Όταν τα L, T επιλεγούν έτσι ώστε $L^2/T = 1$, οι (5) αν οι οριακές συνθήκες ήταν χρονο-εξαρτώμενες, τούτο δεν θα συνέβαινε

και (6) ταυτίζονται και οι οριακές συνθήκες παραμένουν επίσης ίδιες. Εάν συνεπώς η (6) με τις περιγραφείσες οριακές συνθήκες έχει μοναδική λύση, τότε θα πρέπει να έχουμε

$$u\left(\frac{y}{L}, \frac{t}{T}\right) = u(y,t).$$

1

Επιλέγοντας περαιτέρω $T = t$, $L = \sqrt{t}$, έχομε

$$u\left(\frac{y}{\sqrt{t}}, 1\right) = u(y,t),$$

parabolic scaling

που σημαίνει ότι ουσιαστικά το u εξαρτάται από τα t, y μόνο διά του συνδυασμού $y/\sqrt{t}$.

Θέτομε $\eta = y/(2\sqrt{\nu t})$ και έστω $u(y,t) = U f(\eta)$. Από την (5) παίρνομε

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0, \quad f(\infty) = 1, \quad f(0) = 0. \qquad (7)$$

Ολοκληρώνοντας μία φορά την (7) έχομε

$$f'(\eta) = c\, e^{-\eta^2}, \quad c = \text{σταθ}$$

οπότε

$$u = 2U \operatorname{erf}(\eta) = 2U \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

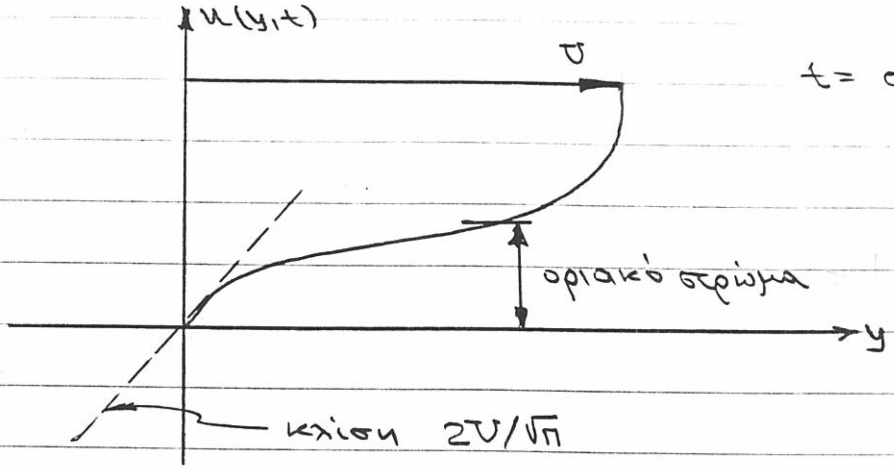
όπου

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\tau^2}\, d\tau \quad \text{(error function)}$$

είναι η <u>συνάρτηση σφάλματος</u> (Η οριακή συνθήκη $f(\infty)=1$ ικανοποιείται διότι $\int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi}/2$).

$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{1}{2} \Longrightarrow u = U$

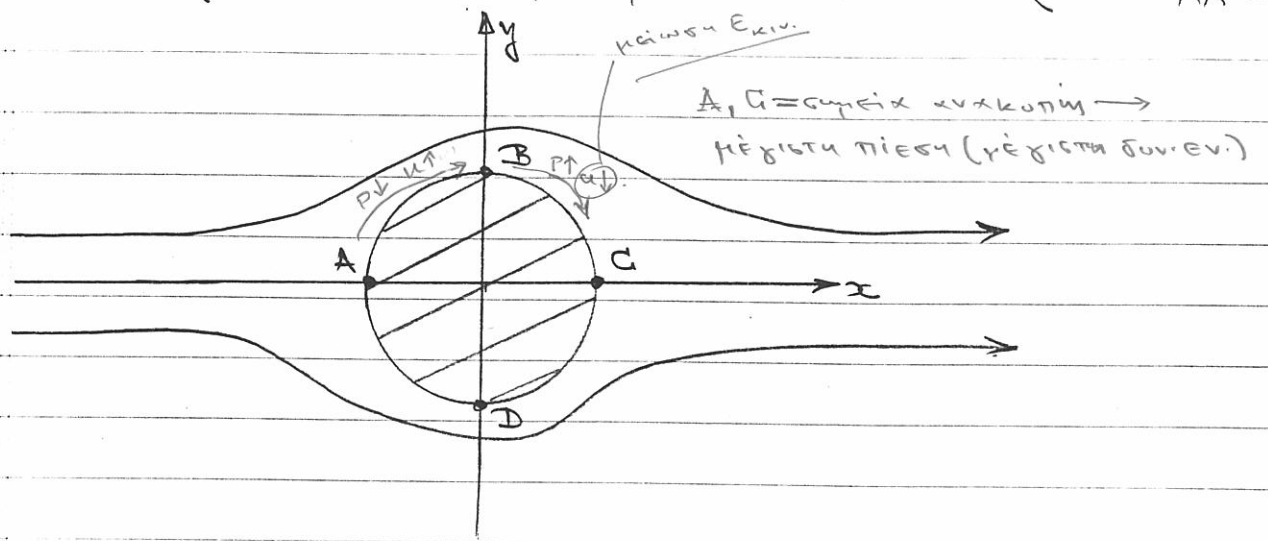
Το γράφημα $u(y,t)$ γιά σταθερό $t>0$ φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 3. Η περιοχή όπου η ροή διαφέρει σημαντικά από την ομοιόμορφη ροή Euler είναι το οριακό στρώμα με πάχος ανάλογο του $\sqrt{\nu t} = \sqrt{t}/\sqrt{R}$. Δηλαδή, γιά δεδομένη χρονική στιγμή το πάχος του οριακού στρώματος είναι ανάλογο του $1/\sqrt{R}$ (ισχυρισμός 1, σελ. 6.1).



ΣΧΗΜΑ 3

Ο ισχυρισμός 2 είναι ότι είναι δυνατόν η ροή να αποκολληθεί από το στερεό σύνορο μέσα στο οριακό στρώμα. Μιά ευρετική τεκμηρίωση αυτού του ισχυρισμού βασίζεται στη θεώρηση της δυναμικής ροής γύρω από ένα κύλινδρο (ΣΧΗΜΑ 4). Από το Θεώρημα Bernoulli προκύπτει ότι η μέγιστη πίεση εμφανίζεται στα σημεία ανακοπής A και C. (βλ. Παράδειγμα 2, σελ. 5.15). Αυτά τα σημεία είναι πράγματι σημεία μέγιστης δυναμικής ενέργειας. Καθώς ένα στοιχείο ρευστού κινείται από το A προς το B, η πίεση ελαττώνεται και η ταχύτητα αυξάνει, ενώ καθώς κινείται από το B προς το C συμβαίνει το αντίθετο. Τούτο είναι ανάλογο με το εξής: Καθώς ένα ιδανικό ποδήλατο που κινείται χωρίς τριβή κατεβαίνει ένα λόφο, απο-

κιά επαρκή ορμή ώστε να ανέβει στον επόμενο χώρο.
Υποθέτομε τώρα ότι μέσα στη ροή δημιουργείται ένα οριακό στρώμα, εντός του οποίου το ρευστό επιβραδύνεται από τη δυνάμεις τριβής. Ως αποτέλεσμα της επιβράδυνσης αυτής, ένα στοιχείο ρευστού που κινείται επί του τόξου AC είναι δυνατόν να μην έχει επαρκή κινητική ενέργεια γιά να φτάσει στο C, και "εγκαταλείπει" το σύνορο του κυλίνδρου μεταξύ A και C (αποκολλάται).

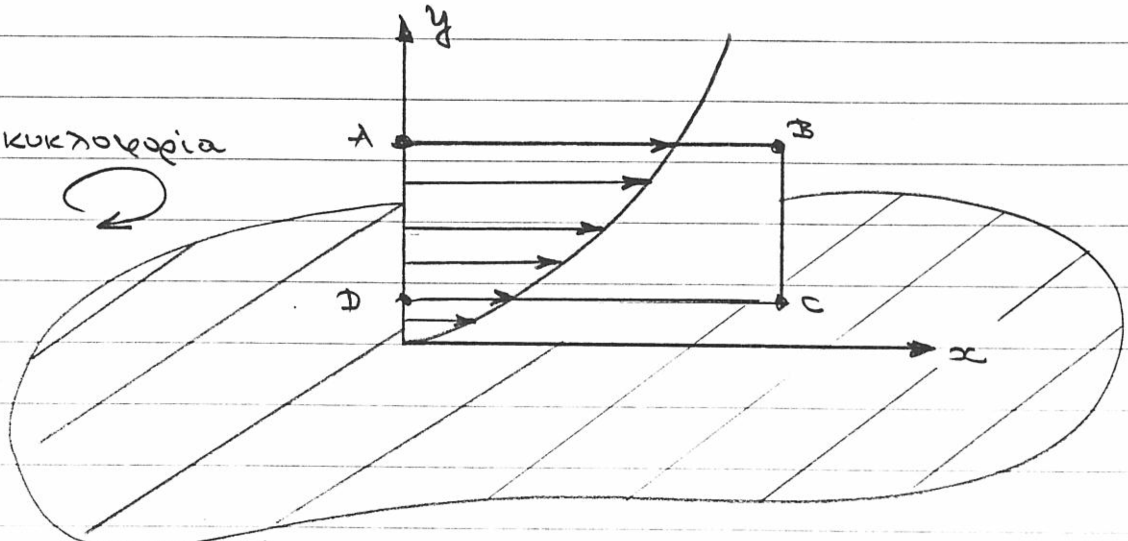


ΣΧΗΜΑ 4

Η παραπάνω επιχειρηματολογία αποτελεί απλά μια ένδειξη του πόσο περίπλοκο είναι το πραγματικό φαινόμενο. Επί παραδείγματι, κοντά στο σύνορο η συνεκτικότητα δεν έχει μόνο σαν αποτέλεσμα την επιβράδυνση του ρευστού αλλά και την παραβίαση του Θεωρήματος Bernoulli.
!! Είναι πιθανόν η παραπάνω επιχειρηματολογία να έχει επίσης πολύ μικρή αξία, σε σχέση με το γεγονός ότι τα πειράματα δείχνουν ότι πράγματι η ροή αποκολλάται στο οριακό στρώμα.

Ο $\boxed{\text{ισχυρισμός 3}}$ είναι ότι το οριακό στρώμα γεννά στροβιλότητα. Για να καταλάβουμε πως είναι δυνατόν να συμβεί αυτό θεωρούμε τη ροή κοντά στο σύνορο και υπολογίζουμε την κυκλοφορία κατά μήκος της γραμμής ABCD (ΣΧΗΜΑ 5).

$$\int_{ABCD} \vec{u}\cdot d\vec{s} = \int_{DA} v\,dy + \int_{AB} u\,dx - \int_{CB} v\,dy - \int_{DC} u\,dx.$$



$v(y) \simeq \underset{0}{\underset{\parallel}{v(0)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{(\partial_y v)}}\, y + \frac{1}{2}(\partial_y^2 v)\, y^2$

ΣΧΗΜΑ 5

$u(x, y=0) = 0$

Επειδή πάνω στο σύνορο $u=0$, είναι επίσης $\partial_x u = 0$, και από την συνθήκη ασυμπιεστότητας $\nabla\cdot\vec{u} = 0$, παίρνουμε $\partial_y v = 0$. Συνεπώς αφού $v=0$ πάνω στο σύνορο, το v θα είναι αναγκαστικά μικρό κοντά στο σύνορο. Ας υποθέσουμε, πιό συγκεκριμένα, ότι το v είναι μικρό σε σχέση με τις τιμές του u κατά μήκος της AB και ότι το u είναι περίπου μηδέν κατά μήκος της DC (τούτο θα μπορούσε να μην ισχύει κοντά σε σημεία απο κόλλησης της ροής). Συνεπώς

$$\int_{ABCD} \vec{u}\cdot d\vec{s} \approx \int_{AB} u\,dx > 0 ,$$

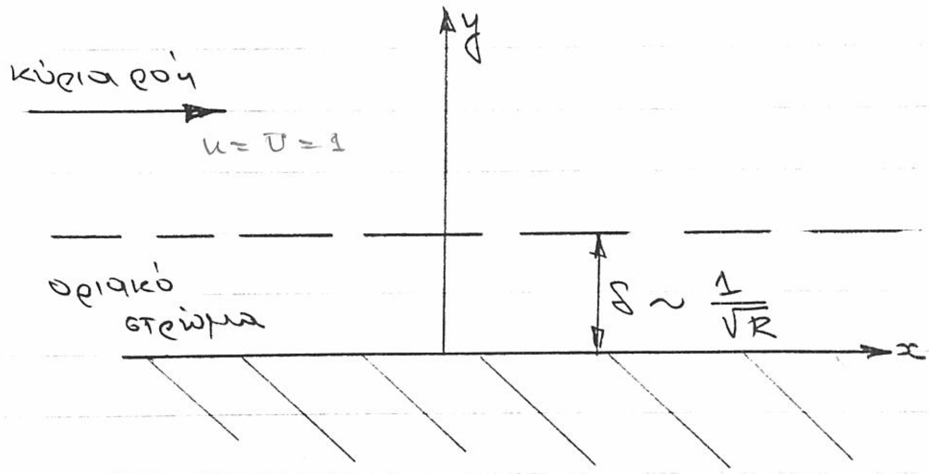
δηλαδή η ροή κοντά στο σύνορο έχει μη μηδενική κυκλοφορία και άρα στροβιλότητα.

6.2. Οι εξισώσεις Prandtl

Θα κατασκευάσουμε τώρα μερικές προσεγγίσεις των εξισώσεων Navier-Stokes, οι οποίες είναι, τουλάχιστον διαισθητικά, ικανοποιητικές για την περιγραφή του οριακού στρώματος μακρυά από τα σημεία αποκόλλησης της ροής. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία διδιάστατη ασυμπίεστη ομογενή ροή στο ημιεπίπεδο $y>0$. Γράφουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes στη μορφή

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t u + u\,\partial_x u + v\,\partial_y u = -\partial_x P + \frac{1}{R}\Delta u \\ &\partial_t v + u\,\partial_x v + v\,\partial_y v = -\partial_y P + \frac{1}{R}\Delta v \\ &\partial_x u + \partial_y v = 0 \qquad \text{στο } D \\ &\text{και} \\ &u = v = 0 \qquad \text{στο } \partial D . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός Reynolds R είναι αρκετά μεγάλος, οπότε το πάχος του οριακού στρώματος είναι $\delta \sim 1/\sqrt{R}$ (ΣΧΗΜΑ 6).



ΣΧΗΜΑ 6

inner variable

Σύμφωνα με τα όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 6.1. αναμένομε το v να είναι μικρό μέσα στο οριακό στρώμα. Εισάγομε την αλλαγή χωρικής μεταβλητής $y' = y/\delta$ γιά να εστιάσουμε την προσοχή μας στο οριακό στρώμα όπου η επίδραση της συνεκτικότητας είναι σημαντική. Αναμένομε επίσης ότι $u \sim 1$ γιά $y \sim \delta$, επειδή στο όριο του οριακού στρώματος η ροή θα είναι ουσιαστικά ιδανική (κύρια ροή) εξ ορισμού.

Ισχυριζόμαστε ότι το v είναι μικρό σε απόσταση δ από το σύνορο. Πράγματι, πάνω στο σύνορο $v = 0$, οπότε

$$v(x,y) \approx \underbrace{v(x,0)}_{=0} + y\frac{\partial v}{\partial y} = y\frac{\partial v}{\partial y}, \quad O(v) = \underbrace{O(y)}_{=\delta}\,\underbrace{O(v_y)}_{=1}$$

$y = O(\delta)$ το πολύ, και $\partial v/\partial y = O(1)$ διότι

ασυμπιεστότητα: $$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

και $\partial u/\partial x = O(1)$.

$O(v) = \delta$

Εισάγοντας τις μεταβλητές

$$x' = x, \quad y' = y/\delta, \quad t' = t, \quad u' = u, \quad v' = v/\delta, \quad p' = p$$

$u = O(1)$

$u(x,\delta) \approx U = 1$

$\delta = 1/\sqrt{R} \Rightarrow R = 1/\delta^2$

$\frac{1}{R} = \delta^2$

οι εξισώσεις (8) γράφονται ως εξής

$$\left.\begin{array}{l}
\partial_{t'} u' + u' \partial_{x'} u' + v' \partial_{y'} u' = -\partial_{x'} p' + \\
\qquad + \frac{1}{R}\left(\partial_{x'}^2 u' + \frac{1}{\delta^2}\partial_{y'}^2 u'\right) \\
\qquad \underbrace{O(\delta^2)\partial_{x'}^2 u'}_{\to 0} + O(1)\cdot\partial_{y'}^2 u' \\
\underbrace{\delta \partial_{t'} v' + \delta u' \partial_{x'} v' + \delta v' \partial_{y'} v'}_{\to 0} = -\frac{1}{\delta}\partial_{y'} p' + \\
\qquad + \frac{1}{R}\left(\delta \partial_{x'}^2 v' + \frac{\delta}{\delta^2}\partial_{y'}^2 v'\right) \\
\qquad \underbrace{O(\delta^3)\partial_{x'}^2 v'}_{\to 0} \quad \underbrace{O(\delta)\partial_{y'}^2 v'}_{\to 0} \\
\partial_{x'} u' + \partial_{y'} v' = 0 \quad , \quad y' > 0 \\
u' = v' = 0 \quad \text{πάνω στον άξονα } x'.
\end{array}\right\} (9)$$

Διαχωρίζουμε τώρα τους ισχυρότερους όρους στις εξισώσεις (9), και αγνοούμε τους όρους υψηλότερης τάξης ως προς δ. Εάν δεν γνωρίζαμε ότι $\delta \sim 1/\sqrt{R}$, θα μπορούσαμε να συνάγομε αυτό το συμπέρασμα από τις εξισώσεις (9). Πράγματι ο σκοπός της αλλαγής μεταβλητής $y' = y/\delta$ είναι να εστιάσουμε την προσοχή μας στην περιοχή κοντά στο σύνορο όπου τα φαινόμενα συνεκτικότητας είναι σημαντικά, και όπου έχουμε μετάβαση από την περιοχή αργής ροής κοντά στο σύνορο στην κύρια ροή μακριά απ' αυτό.

Εάν το δ είναι μικρότερο από $O(1/\sqrt{R})$, τότε μόνο ο όρος συνεκτικότητος είναι σημαντικός στην πρώτη εκ των εξισώσεων (9), και συνεπώς έχομε να κάνουμε μόνο με την ροή πολύ κοντά στο σύνορο. Εάν

$\frac{\delta}{1/\sqrt{R}} \ll 1 \Rightarrow \delta^2 R \ll 1$ $\quad \frac{1}{\delta^2 R}\partial_{y'}^2 u'$

αντίθετα, το δ είναι μεγαλύτερο του $O(1/\sqrt{R})$ τα συνεκτικά φαινόμενα εξαφανίζονται και ασχολούμαστε με τη ροή σε μία σχετικά μεγάλη περιοχή. Συνεπώς, η μόνη δυνατή επιλογή είναι $\delta = O(1/\sqrt{R})$. Από τα παραπάνω επιχειρήματα, είναι εύλογο να αποδεχθούμε ότι μέσα στο οριακό στρώμα μία καλή προσέγγιση των εξισώσεων Navier-Stokes είναι οι <u>εξισώσεις Prandtl</u>

$$
\boxed{
\left.
\begin{aligned}
&\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = -\partial_x P + \frac{1}{R}\partial_y^2 u \\
&\partial_y P = 0 \qquad\qquad R = LU/\nu \\
&\partial_x u + \partial_y v = 0 \qquad , \ y > 0 \\
&u = v = 0 \quad \text{γιά} \quad y = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
}
$$

Στη θεωρία του οριακού στρώματος ελπίζουμε, η υποθέτουμε, ότι: εάν $\vec{u}(x,y,t)$ είναι μία λύση των εξισώσεων Navier-Stokes και $\vec{u}_p(x,y,t)$ μία αντίστοιχη λύση των εξισώσεων Prandtl γιά τις ίδιες αρχικές συνθήκες, τότε υπάρχει κάποια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$
\| \vec{u}(x,y,t) - \vec{u}_p(x,y,t) \| \leq \frac{C}{R^\alpha} \ , \ C > 0
$$

γιά $0 \leq y \leq \delta$ και $R \to \infty$, όπου $\| \cdot \|$ είναι η νόρμα ενός συναρτησιακού χώρου (που πρέπει να οριςθεί, γιατί προς το παρόν δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα θεωρήματα προσεγγίσεως).

Ας δούμε τώρα μερικές <u>σημαντικές συνέπειες των εξισώσεων (10).</u>

(1) <u>Η πίεση μεταβάλλεται μόνο στην κατεύθυνση x</u>. Επομένως, εάν η πίεση είναι γνωστή έξω από το οριακό στρώμα είναι γνωστή και μέσα σ' αυτό.

(2) <u>Η στροβιλότητα ζ διαδίδεται σύμφωνα με την εξίσωση $D\zeta/Dt = \frac{1}{R}\partial_y^2\zeta$</u>. Πράγματι έχομε

$$\zeta = \partial_x v - \partial_y u = -\partial_y u$$

Από την πρώτη εκ των εξισώσεων (10) παίρνομε

$$\partial_t \zeta = -\partial_y \partial_t u = -\partial_y\left(-\partial_x p + \frac{1}{R}\partial_y^2 u - u\partial_x u - v\partial_y u\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\partial_y^2\zeta - v\partial_y\zeta - u\partial_x\zeta + (\partial_x u + \partial_y v)\partial_y u =$$

$$= \frac{1}{R}\partial_y^2\zeta - v\partial_y\zeta - u\partial_x\zeta$$

η

$$\partial_t\zeta + (u\partial_x + v\partial_y)\zeta = \frac{1}{R}\partial_y^2\zeta.$$

δηλαδή

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{1}{R}\partial_y^2\zeta. \qquad (11)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι <u>η στροβιλότητα</u>, αφ' ενός μεν <u>μεταφέρεται στα κατάντι της ροής</u>, και αφ' ετέρου <u>διαχέεται στην κατεύθυνση y</u>.

Για τις εξισώσεις Navier-Stokes σε δύο διαστάσεις

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{1}{R}\Delta\zeta,$$

οπότε βλέπομε ότι στην προσέγγιση του οριακού στρώματος "επιβιώνει" μόνο η ∂_y^2 παράγωγος στον τελεστή Laplace.

Στην παράγραφο 4.6. (σελ. 4.22) είδαμε ότι η ταχύτητα $\vec{u}$ υπολογίζεται μέσω της συνάρτησης ροής από τις εξισώσεις

$$\Delta\psi = -\xi \text{ στο } D, \quad \psi|_{\partial D} = 0$$

$$u = \partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi,$$

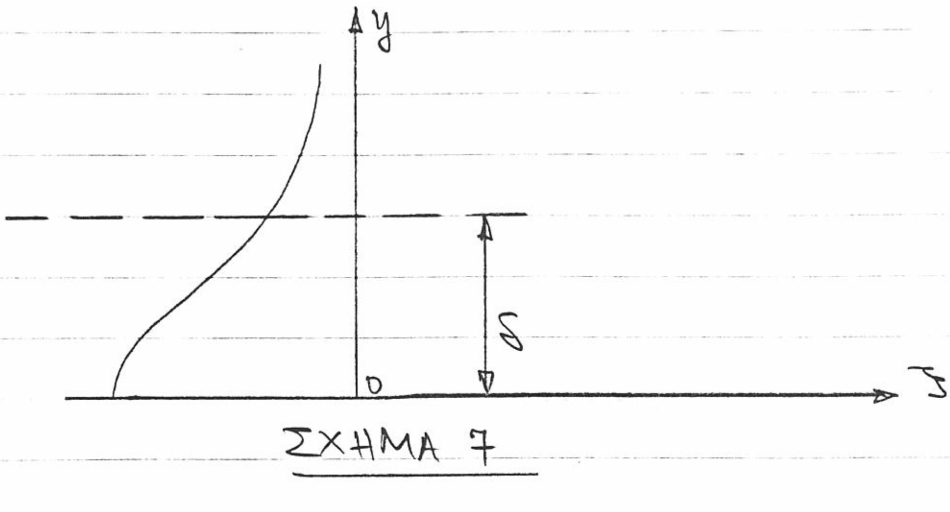
στην περίπτωση των διδιάστατων ασυμπίεστων εξισώσεων Navier-Stokes. Στην περίπτωση του οριακού στρώματος έχομε την απλή σχέση

$$\xi = -\partial_y u \quad \text{οπότε} \quad u = -\int_0^y \xi \, dy.$$

Χρησιμοποιώντας τη λύση γιά το οριακό στρώμα επιπέδου πλάκας (σελ. 6.5)

$$u(y,t) = 2U \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

βρίσκουμε την αντίστοιχη κατανομή στροβιλότητος που φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 7. (όπως και διαισθητικά αναμένομε $\xi < 0$, δηλαδή η κυκλοφορία είναι δεξιόστροφη).



ΣΧΗΜΑ 7

άσκηση: Να αποδειχθεί ότι γιά την περίπτωση καμπυλόγραμμου συνόρου, οι εξισώσεις Prandtl παραμένουν οι ίδιες εκτός από την εξίσωση πίεσης η οποία έχει τη μορφή

$$k u^2 = \partial_y P,$$

όπου k είναι η καμπυλότητα του συνόρου.

Τέλος πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν στη βιβλιογραφία διάφορες στρατηγικές γιά την συνδυασμένη χρήση των εξισώσεων Prandtl και των εξισώσεων ιδανικής ροής με στόχο την κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων των εξισώσεων Navier-Stokes.

1. Συναρμογή του πεδίου ταχύτητος των δύο λύσεων σε απόσταση $\delta \sim 1/\sqrt{R}$ από το σύνορο. Η κύρια δυσκολία είναι ότι οι δύο ροές δεν είναι καί ανάγκη παράλληλες γιά $y=\delta$.

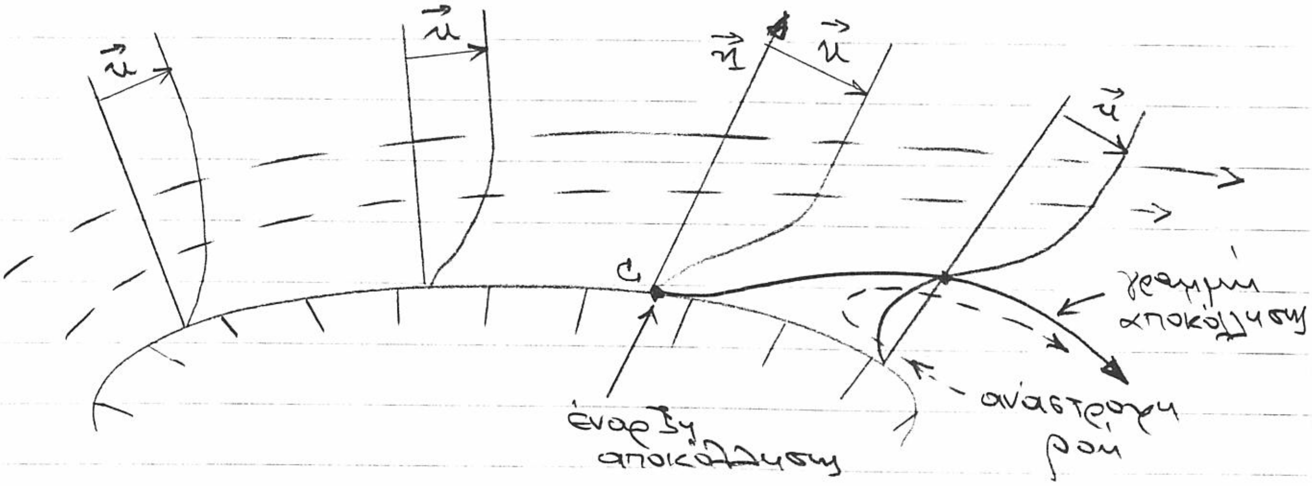
2. Απαιτούμε οι λύσεις των εξισώσεων Euler και Prandtl γιά την κύρια ροή και το οριακό στρώμα αντίστοιχα να συναρμόζονται γιά $R \to \infty$. Καθώς $R \to \infty$, το οριακό στρώμα γίνεται όλο και πιό λεπτό. Μπορούμε να επιβάλλομε οριακές συνθήκες γιά τις Euler στο σύνορο γιά την v, αλλά όχι γιά την u. Επίσης στο σύνορο του οριακού στρώματος μπορούμε να επιβάλλομε οριακή συνθήκη γιά το u στις εξισώσεις Prandtl, αλλά όχι γιά το v. Τούτο όμως μπορεί να υπολογισθεί από τις Euler, όπως αντίστοιχα η οριακή συνθήκη γιά το u στις Euler μπορεί να υπολογισθεί από

τις Prandtl. Οι σχετικοί (συνήθως αριθμητικοί) υπολογισμοί είναι δύσκολοι και ανεπαρκείς όταν έχουμε αποκόλληση.

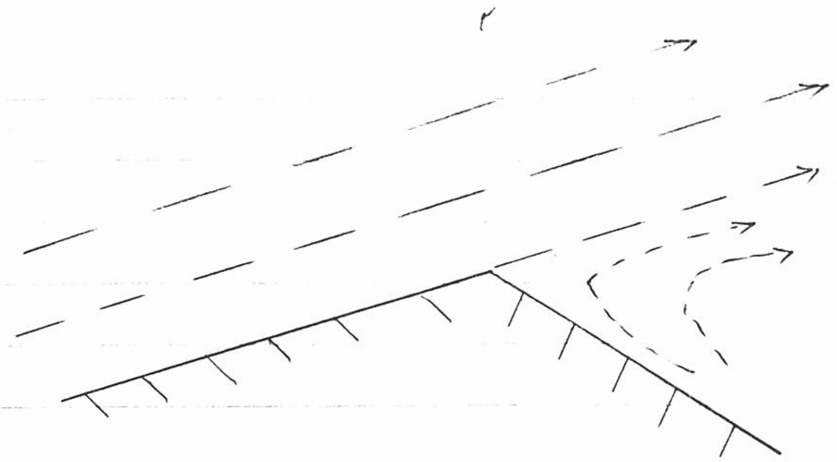
3. Συναρμογή μιάς εσωτερικής και μιάς εξωτερικής λύσης (των εξισώσεων Prandtl και Euler αντίστοιχα, δηλαδή) σε μιά περιοχή πάχους $1/R^{\alpha}$, με ομαλή μετάβαση μεταξύ των δύο λύσεων. Οι σχετικοί υπολογισμοί είναι επίσης δύσκολοι και η επιλογή του α δεν μπορεί να τεκμηριωθεί επαρκώς.

6.3. Αποκόλληση του οριακού στρώματος

Εχει παρατηρηθεί στα πειράματα ότι όταν σε μία ροή αναπτύσσεται οριακό στρώμα κοντά σ' ένα στερεό σύνορο, οι γραμμές ροής είναι δυνατόν να απομακρυνθούν από το σύνορο (αποκόλληση του οριακού στρώματος). Μία τυπική τέτοια κατάσταση φαίνεται στο ΣΧΗΜΑ 8.



ΣΧΗΜΑ 8α



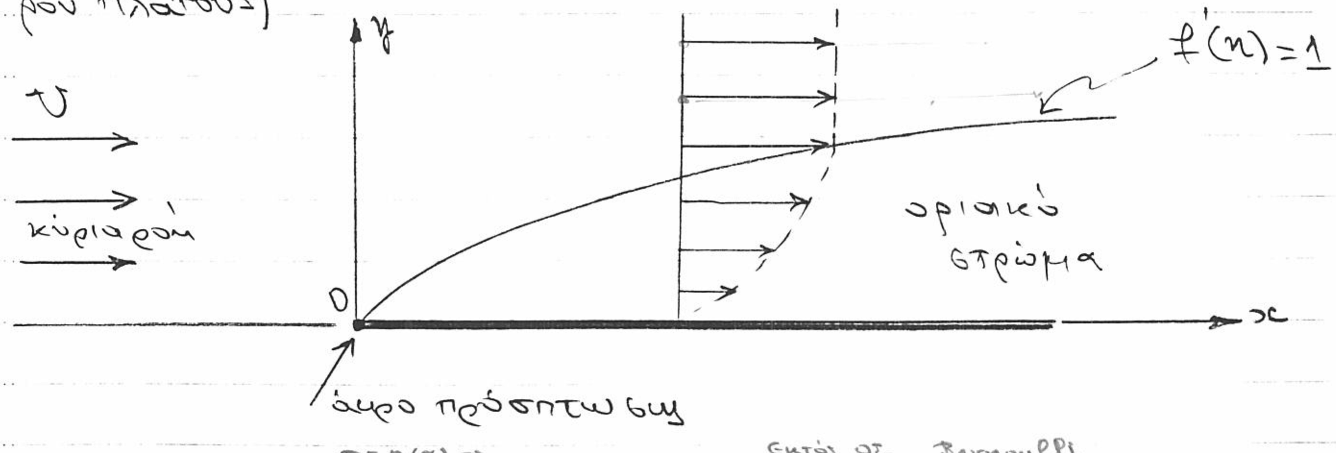
ΣΧΗΜΑ 8b

Σημεία έναρξης αποκόλλησης είναι συνήθως αυτά για τα οποία η ιξωδοφορία στο σύνορο μηδενίζεται

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{c} = \xi = 0 ,$$

αλλά βέβαια δεν υπάρχουν αυστηροί μαθηματικοί χαρακτηρισμοί των σημείων αποκόλλησης.

<u>Παράδειγμα</u> (μόνιμο $\nearrow \partial_t u = 0$ οριακό στρώμα σε επίπεδη πλάκα απείρου πλάτους)



$\partial_y P = 0 \Rightarrow$ $P = P(x) \Rightarrow$ $P = σταθ. =$ πίεση εκτός οριακού στρώματος (εκτός ΟΣ Bernoulli)

εξισώσεις Prandtl $\begin{cases} u\partial_x u + v\partial_y u = \nu \partial_y^2 u \\ \partial_x u + \partial_y v = 0 \end{cases}$

οριακές συνθήκες
$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \ , & x>0 \\ v(x,0) = 0 \ , & x>0 \\ u(x,y) \to U \ , & y \to \infty \end{cases}$$

Επειδή η ροή είναι ασυμπίεστη

$$u = \partial_y \psi \ , \quad v = -\partial_x \psi$$

Εστω

$$\psi(x,y) = \sqrt{\nu U x}\, f(\eta)$$
$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

οπότε

$$\left.\begin{aligned} u &= U f'(\eta) \\ v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\left(\eta f'(\eta) - f(\eta)\right) \end{aligned}\right\}$$

Οι εξισώσεις Prandtl ικανοποιούνται εάν

$$\left.\begin{aligned} & f f'' + 2 f''' = 0 \\ & f(0) = f'(0) = 0 , \quad f'(\infty) = 1 \end{aligned}\right\}.$$