

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων της ελαστοδυναμικής και μελέτη της κυματικής διάδοσης στα στερεά : επιμήκη κύματα (P-waves), εγκάρσια κύματα (S-waves) και επιφανειακά κύματα (Rayleigh waves)

Χρυσούλα Τσόγκα
tsogka@tem.uoc.gr

1 Το φυσικό πρόβλημα και εξισώσεις

Ενδιαφερόμαστε για το πρόβλημα μετάδοσης κυμάτων σε ένα στερεό, ομογενές και ισότροπο σε δύο διαστάσεις. Το διάνυσμα παραμορφώσεων \vec{u} ικανοποιεί τις γραμμικές εξισώσεις της ελαστοδυναμικής :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\vec{u}) = \vec{f} \quad \text{στην } \Omega \times R \quad (1)$$

με τις αρχικές συνθήκες :

$$\begin{cases} \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) & \text{στην } \Omega \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{u}_1(x) & \text{στην } \Omega \end{cases} \quad (2)$$

και τις συνοριακές συνθήκες :

$$\begin{cases} \vec{u} = 0 & \text{στο } \Gamma_D \text{ (Dirichlet)} \\ \sigma(\vec{u})\vec{n} = 0 & \text{στο } \Gamma_N \text{ (Neumann)} \\ \sigma(\vec{u})\vec{n} = B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} & \text{στο } \Gamma_A \text{ (Absorbing)} \end{cases} \quad (3)$$

όπου $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_A = \Gamma$, \vec{n} είναι το κάθετο μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα και ο πίνακας B ορίζεται από :

$$B = - \begin{bmatrix} \sqrt{(\lambda + 2\mu)\rho} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu\rho} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Παρατήρηση 1.1 Η απορροφητική (absorbing) συνοριακή συνθήκη θα χρησιμοποιηθεί μόνο σε σύνορο παράλληλο με τον άξονα y .

Στην (1), σ είναι ο τανυστής τάσης που συνδέεται με τον τανυστή παραμορφώσεων $\varepsilon(\vec{u})$

$$\varepsilon(\vec{u})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

με τον νόμο του Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div}(\vec{u}) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda \operatorname{Tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (5)$$

όπου λ και μ είναι οι συντελεστές Lamé που χαρακτηρίζουν το στερεό υλικό.

E 1.1 Δείξτε ότι το σύστημα (1) μπορεί να γραφτεί ως :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f} \quad \text{στην } \Omega \times R \quad (6)$$

ή αλλιώς θέτοντας $\vec{u} = (u, v)$:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = f_1 \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f_2 \end{cases} \quad (7)$$

Ενέργεια

Ορίζουμε την ενέργεια του συστήματος ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :

$$E(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \sigma(\vec{u}) \varepsilon(\vec{u}) \right) dx \quad (8)$$

E 1.2 Δείξτε ότι αν $\Omega = R^2$ και $f_1 = f_2 = 0$ τότε η ενέργεια διατηρείται $\frac{d(E(t))}{dt} = 0$.

Έστω $H = (L^2(\Omega))^2$ και

$$V = \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2; \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}$$

E 1.3 Δείξτε ότι η μεταβολική μορφή του προβλήματος (1), (2) (3) γράφεται :

Βρείτε $\vec{u}(x, t)$ τ.ω $\vec{u}(t) \in V$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} dx + \int_{\Omega} \sigma(\vec{u}) \varepsilon(\vec{v}) dx - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_A} B \vec{u} \cdot \vec{v} d\gamma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx \quad (9)$$

για κάθε $\vec{v} \in V$.

Θα δεχτούμε ότι ψάχνουμε την λύση στο χώρο $L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H)$.

2 Ανάλυση με επίπεδα κύματα

Ορίζουμε ως αρμονικά επίπεδα κύματα τις λύσεις της εξίσωσης (1), με $\vec{f} = \vec{0}$, που γράφονται στην μορφή :

$$\vec{u} = \vec{d} \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})) \quad (10)$$

όπου

- \vec{k} είναι το διάνυσμα κύματος (αντιστοιχεί στην διεύθυνση μετάδοσης του κύματος).
- ω είναι η κυκλική συχνότητα
- $f = \frac{\omega}{2\pi}$ είναι η συχνότητα
- \vec{d} είναι η διεύθυνση ταλάντωσης.

Ε 2.1 Δείξτε ότι για να βρούμε τα αρμονικά επίπεδα κύματα που μεταδίδονται στην κατεύθυνση \vec{k} αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα :

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{d} \neq 0 \text{ και } \omega \text{ τ. } \omega. \\ (\mu |\vec{k}|^2 - \rho\omega^2)\vec{d} + (\lambda + \mu)(\vec{d} \cdot \vec{k}) \vec{k} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

ή αλλιώς,

$$\begin{cases} \text{Βρείτε } \vec{d} \neq 0 \text{ και } \omega \text{ τ. } \omega. \\ \omega^2 \vec{d} = \hat{K} \vec{d} \end{cases} \quad (12)$$

Το πρόβλημα (12) είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Υπολογίστε ω^2 (=τις ιδιοτιμές του πίνακα \hat{K}) και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα \vec{d} . Συμπεράνετε ότι υπάρχουν δύο είδη κυμάτων : τα επιμήκη κύματα (*Primary, P-waves*) που αντιστοιχούν στην πιο μεγάλη ιδιοτιμή, και των οποίων η κατεύθυνση ταλάντωσης είναι παράλληλη στην κατεύθυνση διάδοσης ($\vec{d} \parallel \vec{k}$) και τα εγκάρσια κύματα (*Shear, S-waves*) των οποίων η κατεύθυνση ταλάντωσης είναι κάθετη στην κατεύθυνση διάδοσης ($\vec{d} \perp \vec{k}$). Γράψτε τις αντίστοιχες σχέσεις διασποράς (τις σχέσεις που συνδέουν $|\vec{k}|$ και ω). Βρείτε τις ταχύτητες μετάδοσης των κυμάτων (λέγονται και ταχύτητες φάσης) που ορίζονται από :

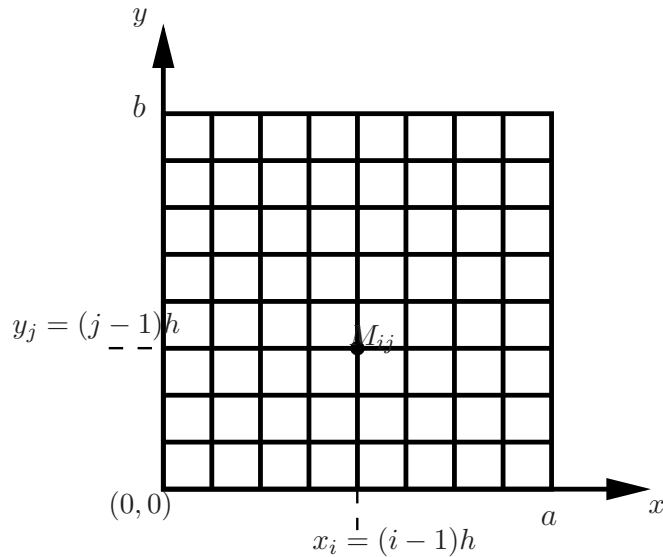
$$V = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

Παρατηρήστε ότι και οι δύο ταχύτητες είναι ανεξάρτητες από την συχνότητα (γιαντό λέμε ότι οι ελαστοδυναμικές εξισώσεις δεν έχουν διασπορά) και την κατεύθυνση (για ισότροπα μέσα μεταφοράς).

3 Προσέγγιση

3.1 Ημί-διακριτοποίηση στο χώρο

Στην συνέχεια, θεωρούμε ότι η περιοχή Ω είναι ένα τετράγωνο $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. Κατασκευάζουμε ένα πλέγμα της Ω με τις ευθείες $x = (i - 1)\Delta x$ $i = 1, \dots, N_x$; $y = (j - 1)\Delta y$ $j = 1, \dots, N_y$, που τέμνονται στα σημεία M_{ij} . Δίνουμε στα σημεία μια ολική αρίθμηση M_I , $I = 1, \dots, N_x \times N_y = N$.



Σχήμα 1: Παράδειγμα πλέγματος

Συμβολίζουμε με H_h^1 το υποσύνολο πεπερασμένης διάστασης του $H^1(\Omega)$,

$$H_h^1 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{Q_j} \in Q^1(Q_j) \forall j\}$$

(w_j) μία βάση του H_h , ορίζεται από :

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \quad 1 \leq I, J \leq N$$

και V_h το υποσύνολο του V , με διάσταση $N_h = N - N_D \leq N$, όπου N_D είναι ο αριθμός των σημείων που ανοίχουν στο σύνορο Dirichlet :

$$V_h = \{\vec{v} \in (H_h^1)^2; \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

Ορίζουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις βάσης,

$$\vec{w}_I^1 = \begin{pmatrix} w_I \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{w}_I^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ w_I \end{pmatrix}$$

Ε 3.1 Γράψτε την προσεγγιστική μεταβολική μορφή του προβλήματος. Η προσεγγιστική λύση $\vec{u}_h = (u_h^1, u_h^2)$ γράφεται σύμφωνα με την μέθοδο της παρεμβολής :

$$u_h^1(x, t) = \sum_{J=1}^{N_h} u_J^1(t) w_J(x)$$

$$u_h^2(x, t) = \sum_{J=1}^{N_h} u_J^2(t) w_J(x)$$

ή

$$\vec{u}_h(x, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{J=1}^{N_h} u_J^\alpha(t) \vec{w}_J^\alpha(x)$$

Δείξτε ότι το πρόβλημα γράφεται στη μορφή,

$$M_h \frac{d^2 U}{dt^2} - B_h^A \frac{dU}{dt} + K_h U = F_h \quad (13)$$

όπου πρέπει να βρείτε τους πίνακες M_h (μάζας), K_h (άκαμπτος) και B_h^A (ο πίνακας που αντιστοιχεί στις απορροφητικές συνθήκες). Το διάνυσμα U ορίζεται από,

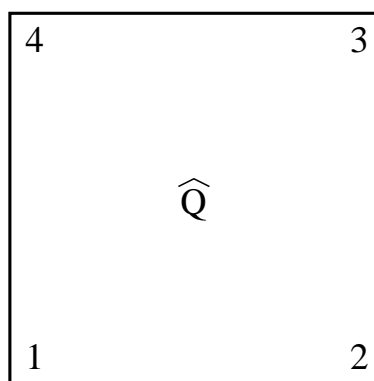
$$U = (u_1^1 \dots u_{N_h}^1 u_1^2 \dots u_{N_h}^2)$$

όπου υποθέσαμε ότι τα σημεία *Dirichlet* αντιστοιχούν στους αριθμούς $N_h + 1$ ως N .

Υπολογισμός των πινάκων αναφοράς

Θεωρούμε το πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς \hat{Q} , συμβολίζουμε με M^i , $i = 1, \dots, 4$ τα σημεία του στην τοπική αρίθμηση (βλέπε σχήμα 2) και με $\vec{\tau}_i^k$ τις τοπικές συναρτήσεις βάσης

$$\vec{\tau}_i^1 = \begin{pmatrix} \tau_i \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{\tau}_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_i \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 2: Η τοπική αρίθμηση

Ε 3.2 Υπολογίστε τους πίνακες αναφοράς. Θα κατασκευάσετε τους πίνακες διάστασης 4×4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ij} = \int \tau_i \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 4 ; \\ K_{11ij} = \int \partial_1 \tau_i \partial_1 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 4 ; \\ K_{22ij} = \int \partial_2 \tau_i \partial_2 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 4 ; \\ K_{12ij} = \int \partial_1 \tau_i \partial_2 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 4 ; \\ K_{21ij} = \int \partial_2 \tau_i \partial_1 \tau_j \ ; i, j = 1, \dots, 4 ; \end{array} \right. \quad (14)$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρώματων να χρησιμοποιήσετε την σχέση

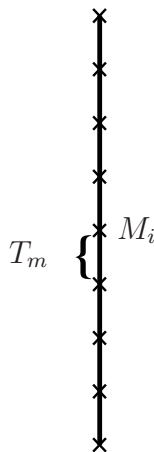
$$\int_Q f dx dy \approx \frac{1}{4} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) |Q|, \quad (15)$$

όπου f_i είναι η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο M_i και Q είναι το εμβαδόν του τετραγώνου Q . Παρατηρήστε ότι ο πίνακας M_h είναι τώρα διαγώνιος.

Ε 3.3 Γράψτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του άκαμπτου πίνακα.

Ορισμός του πίνακα B_h^A .

Πρόκειται για ένα πίνακα που αφορά μόνο τα σημεία που ανοίχουν στο σύνορο Γ_a . Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις βάσης ϕ_i πάνω στο σύνορο είναι συναρτήσεις P^1 μίας μεταβλητής.



Σχήμα 3: Παράδειγμα πλέγματος στο σύνορο Γ_a

Θέωρουμε το πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς σε μία διάσταση :



Σχήμα 4: Πεπερασμένο στοιχείο αναφοράς σε 1d

Συμβολίζουμε με M^i , $i = 1, 2$ τα σημεία του στην τοπική αρίθμηση (βλέπε σχήμα 4) και με $\vec{\phi}_i^k$ τις τοπικές συναρτήσεις βάσης,

$$\vec{\phi}_i^1 = \begin{pmatrix} \phi_i \\ 0 \end{pmatrix} ; \vec{\phi}_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τους πίνακες

$$\int_I \phi_l^m \phi_k^m d\gamma$$

χρησιμοποιώντας την σχέση :

$$\int_I f = \frac{|I|}{2} (f_1 + f_2) \quad (16)$$

όπου $f_{i=1,2}$ είναι η τιμή της συνάρτησης f στα σημεία M_i , $i = 1, 2$ και $|I|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος I .

E 3.4 Γράψτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του πίνακα B_h^A (είναι διαγώνιος).

3.2 Ολική Διακριτοποίηση

E 3.5 Χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές γράψτε την ολική διακριτοποίηση του προβλήματος στην μορφή,

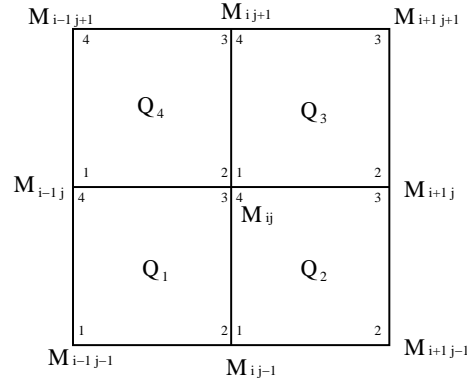
$$M_h \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + B_h^A \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + K_h U^n = F_h^n \quad (17)$$

όπου Δt είναι το βήμα διακριτοποίησης στο χρόνο και U^k είναι η λύση στο χρόνο $k\Delta t$.

3.3 Αριθμητική σχέση διασποράς και μελέτη ευστάθειας της μεθόδου

Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες της αριθμητικής μεθόδου, ενδιαφερόμαστε αρχικά για την περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^2$ και $\vec{f} = \vec{0}$. Θεωρούμε επίσης ότι $\Delta x = \Delta y = h$.

E 3.6 Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του διακριτού προβλήματος γράψτε την εξίσωση στο σημείο M_{ij} , Για ευκολία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρίθμηση του σχήματος 5



Σχήμα 5: Το σημείο M_{ij} και τα γειτονικά του σημεία

$$\rho \frac{\bar{u}_{ij}^{n+1} - 2\bar{u}_{ij}^n + \bar{u}_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} + K_h \bar{u}_h^n = 0 \quad (18)$$

όπου

$$\left\{ \begin{aligned} (K_h \bar{u}_h)_1 &= \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ &+ \frac{\mu}{h^2} (2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \\ &+ \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} (-v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-1}) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (K_h \bar{u}_h)_2 &= \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} (-u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) \\ &+ \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (2v_{i,j} - v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \\ &+ \frac{\mu}{h^2} (2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j}) \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Με αυτό το τρόπο γράψαμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων Q_1 ως μία ισοδύναμη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Για να βρούμε την αριθμητική σχέση διασποράς θεωρούμε λύσεις του προβλήματος της μορφής

$$\bar{u}_h = \vec{d} \exp[i(\omega n \Delta t - ik_x \Delta x - jk_z \Delta z)] \quad (21)$$

Ε 3.7 Δείξτε ότι η σχέση διασποράς γράφεται :

$$\frac{2\rho}{\Delta t^2} (\cos \omega \Delta t - 1) \vec{d} + \hat{K}_h(\vec{k}) \vec{d} = 0 \quad (22)$$

(υπολογίστε τον πίνακα \hat{K}_h).

Μπορούμε να δείξουμε ότι μία απαραίτητη συνθήκη για να είναι η μέθοδος ευσταθής είναι να είναι το ω πραγματικός αριθμός (αλλιώς υπάρχουν λύσεις οι οποίες αυξανονται εκθετικά στο χρόνο). Βρείτε μία συνθήκη έτσι ώστε να έχουμε $\omega \in R$.

E 3.8 Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα \hat{K}_h . Συμβολίζουμε με s_P και s_S αυτές τις ιδιοτιμές, με $s_S \leq s_P$.

E 3.9 Γράψτε την συνθήκη $\omega \in R$ ($1 - \cos \omega \Delta t \in [0, 2]$) στην μορφή $f(\beta_1, \beta_2) \in [0, 2]$, $\forall k_1, k_2$ με $\beta_1 = \cos(k_1 \Delta x)$ και $\beta_2 = \cos(k_2 \Delta x)$.

Μελετώντας τις τιμές αυτής της συνάρτησης f στο τετράγωνο $[-1, 1]^2$, καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι έχουμε την συνθήκη CFL,

$$\sqrt{V_P^2 + V_S^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (23)$$

4 Προγραμματισμός. Αριθμητική μελέτη.

4.1 Αριθμητική μελέτη της διασποράς

Είδαμε ότι για το συνεχές πρόβλημα οι ταχύτητες μετάδοσης είναι $V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ για τα διαμήκη κύματα και $V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ για τα εγκάρσια. Οι αριθμητικές ταχύτητες V_j^{num} , $j = P, S$ υπολογίζονται από,

$$V_j^{num} = \frac{\omega_j^{num}}{|\vec{k}|}$$

όπου $\omega_j^{num}(|\vec{k}|)$ είναι η λύσεις της αριθμητικής σχέσης διαφοράς

$$\frac{2\rho}{\Delta t^2} (1 - \cos \omega_j^{num} \Delta t) = s_j(\vec{k}) \quad (24)$$

Για να συγκρίνουμε τις αριθμητικές με τις συνεχείς ταχύτητες, ορίζουμε το πηλίκο

$$q_j(\vec{k}) = \frac{\omega_j^{num}(\vec{k})}{|\vec{k}| V_j} \quad \text{με } j = P \text{ ή } S.$$

Ορίζουμε επίσης,

- το μήκος κύματος : $l = \frac{2\pi}{\omega}$.
- τον αριθμό σημείων ανά μήκος κύματος: $G = \frac{l}{h} = \frac{2\pi}{|\vec{k}| h}$
- και το αντίστροφο του $H = 1/G$.

Ε 4.1 Θεωρούμε μία κατεύθυνση μεταφοράς $\vec{k} = |\vec{k}| (\cos\theta, \sin\theta)$. Αντικαθιστούμε στο s_j :

$$k_1 = 2\pi \frac{H}{h} \cos(\theta), \quad k_2 = 2\pi \frac{H}{h} \sin(\theta), \quad \text{όπου } |\vec{k}| = 2\pi \frac{H}{h}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $h = 1$. Παρατηρήστε ότι τώρα s_j εξαρτώνται από το θ και το H . Γράψτε ένα πρόγραμμα που να υπολογίζει τις αριθμητικές ταχύτητες φάσης. Σχεδιάστε τα πηλίκα q_j (για $j = P$ και $j = S$) ως συνάρτηση του H (για $H \in [0., 0.5]$) για διαφορετικές τιμές του $\theta = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ και του $\Delta t = \alpha h = \alpha$ με $\alpha = [0, \alpha_{max}]$, $\alpha_{max} = \frac{1}{\sqrt{v_P^2 + v_S^2}}$. Επίσης σχεδιάστε τα q_j ως συνάρτηση του θ για διαφορετικές τιμές των α και H .

4.2 Υπολογιστικές προσομοιώσεις

Για να προσομοιώσουμε μία πηγή στο σημείο (x_s, y_s) , μπορούμε να θεωρήσουμε,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(x, y, t) = \vec{f}(r)g(t) \\ \text{όπου } \vec{f}(r) = (1 - \frac{r^2}{a^2})^3 1_{B_a} \vec{e}_{j=P,S} \\ r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad a = 5h \\ \text{με } \vec{e}_P = (\frac{x - x_s}{r}, \frac{y - y_s}{r}), \quad \vec{e}_S = (-\frac{y - y_s}{r}, \frac{x - x_s}{r}) \\ \text{με } h = \min(\Delta x, \Delta y) \\ 1_{B_a} \text{ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του δίσκου με κέντρο } (x_s, y_s) \text{ και ακτίνα } a \\ g(t) = \begin{cases} -2(\pi f_0)^2 (t - t_0) \exp(-\pi f_0 (t - t_0))^2 & t \in [0, t_1] \\ 0 & t > t_1 \end{cases} \\ t_0 = \frac{1}{f_0}, \quad t_1 = \frac{2}{f_0} \end{array} \right. \quad (25)$$

και μηδενικές αρχικές συνθήκες,

$$\begin{cases} u_0(x, y) = 0 \\ u_1(x, y) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα F_h ,

$$\vec{f}_h(x, t) = \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^{N_h} f_j^l T_j^l(x)$$

όπου (f_j^1, f_j^2) είναι η τιμή της συνάρτησης $\vec{f}(r)$ στο σημείο M_j και χρησιμοποιούμε την σχέση (15) για τον υπολογισμό του F_h . Έχουμε τότε

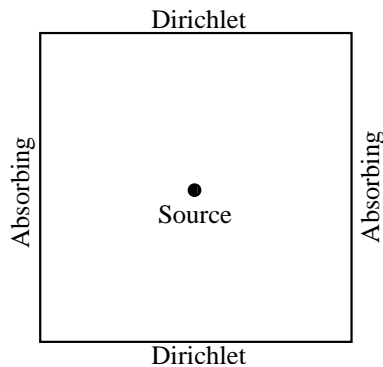
$$F_h = M_h [\vec{f}]$$

με M_h τον πίνακα μάζας που είναι διαγώνιος, με $[\vec{f}] = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_{N_h}^1, f_1^2, f_2^2, \dots, f_{N_h}^2)$ διάνυσμα που έχει ως συνιστώσες τις τιμές της $\vec{f}(r)$ στα σημεία $M_{i=1, \dots, N_h}$. Άρα έχουμε

$$F_h^n = F_h g(n\Delta t), \quad \Delta t = \alpha h$$

Ε 4.2 Γράψτε ένα κώδικα επίλυσης του διακριτού προβλήματος με τις συνοριακές συνθήκες. Χρησιμοποιήστε των κώδικα για τις παρακάτω προσομοιώσεις

Ε 4.3 Πρώτο παράδειγμα



Σχήμα 6: Πρώτο παράδειγμα

Επιλύστε το πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες του σχήματος 6. Θα κάνετε δύο προσομοιώσεις : μία χρησιμοποιώντας μια πηγή διαμήκη κυμάτων $\vec{e}_j = \vec{e}_P$ και μια με μία πηγή εγκάρσιων κυμάτων $\vec{e}_j = \vec{e}_S$. Μπορείται να χρησιμοποιήσετε $\Delta x = \Delta y = h$.

α/ Σχεδιάστε την λύση σε διάφορες χρονικές στιγμές. Σχεδιάστε επίσης το $\text{div}(\vec{u}) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$ και $\text{rot}(\vec{u}) = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$, για να διαχωρίσετε τα κύματα P από τα S . Παρατηρήστε ότι για την πρώτη προσομοίωση έχουμε $\text{rot}(\vec{u}) \simeq 0$ ενώ για την δεύτερη $\text{div}(\vec{u}) \simeq 0$.

β/ Διαλέξτε μερικά σημεία στην περιοχή Ω και σχεδιάστε την λύση ως συνάρτηση του χρόνου σε αυτά τα σημεία.

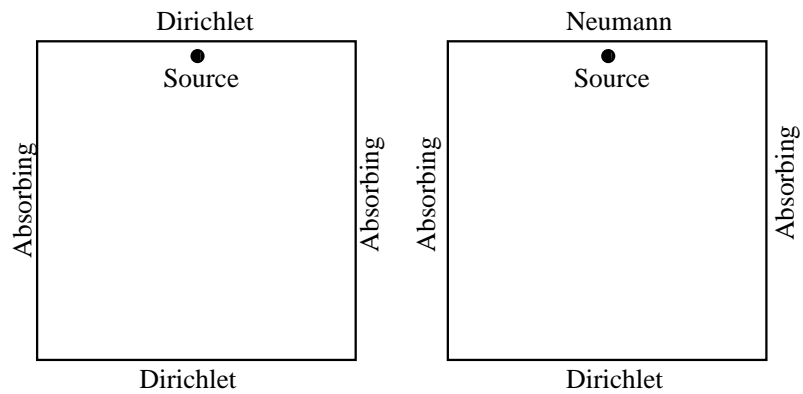
ς/ Τρέξτε των κώδικα για διαφορετικές τιμές του $\gamma = \sqrt{V_P^2 + V_S^2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Παρατηρήτε αστάθειες από κάποια τιμή του γ και πάνω; Αντιστοιχεί αυτή η τιμή στην θεωρητική τιμή CFL;

δ/ Παρατηρήστε την αριθμητική ανισοτροπία στα αποτελέσματα, όταν το $h \rightarrow 0$ πρέπει το κύμα να μεταδίδεται σε μορφή κύκλων.

ε/ Τι συμβαίνει όταν τα κύματα φτάνουν σε ένα σύνορο Dirichlet; Τι συμβαίνει όταν τα κύματα φτάνουν σε ένα Absorbing σύνορο;

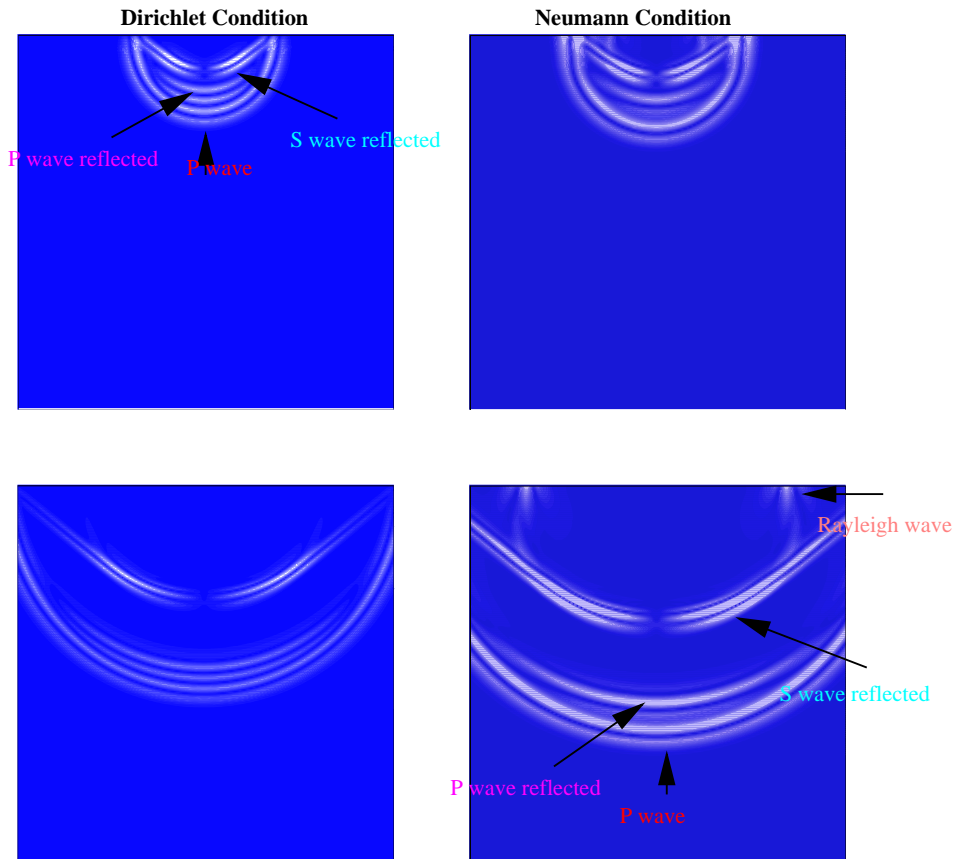
Επιφανειακά κύματα

Ε 4.4 Στις ακόλουθες προσομοιώσεις, μια πηγή κυμάτων P είναι τοποθετημένη κοντά στην επιφάνεια $y = a$. Θα κάνετε δύο προσομοιώσεις : στην πρώτη θα χρησιμοποιήσετε μία συνθήκη *Dirichlet* σε αυτή την επιφάνεια, στην δεύτερη θα χρησιμοποιήσετε μία συνθήκη *Neumann* (λέγεται και συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας), βλέπε σχήμα 7.



Σχήμα 7: Οι συνοριακές συνθήκες για τις δύο προσομοιώσεις

Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις όταν το κύμα P φτάνει στο σύνορο που δεν είναι απορροφητικό έχουμε ανάκλαση δύο κυμάτων ενός P και ενός S . Και μόνο στην δεύτερη περίπτωση έχουμε και ένα τρίτο κύμα επιφανειακό που ονομάζεται κύμα *Rayleigh*, το οποίο μεταδίδεται με μία ταχύτητα λίγο μικρότερη από το κύμα S .



Σχήμα 8: Παράδειγμα αποτελεσμάτων

Παρατήρηση 4.1 Για να βρούμε μια καλή προσέγγιση της λύσης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πλέγμα με αρκετά σημεία ανά μήκος κύματος S (που είναι το μικρότερο)

$$G = \frac{V_S}{f_0 h}$$

Στην πράξη, να θεωρίσετε $G = 5, 10, 15$ και 20 και να μελετήσετε την επιροή του στην ποιότητα των αποτελεσμάτων. Αυτές τις τιμές να χρησιμοποιήσετε στο ερώτημα 4.3d/.

Παρατήρηση 4.2 Μπορείτε να βρείτε τιμές για τα λ , μ και ρ στο internet. Για παράδειγμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις παρακάτω τιμές για το υπέδαφος $\rho = 3gr/cm^3$, $V_P = 3km/s$, $V_S = 1.5km/s$ και $f_0 = 1kHz$. Ή τις παρακάτω τιμές για το ασφάλι $\lambda = 1.091 \times 10^{11} Pascal$, $\mu = 0.821 \times 10^{11} Pascal$ και $\rho = 7840Kgr/m^3$ και μία πηγή με συχνότητα $f_0 = 1kHz$. Στην πράξη για να μην χρησιμοποιήτε τόσο μεγάλους αριθμούς μπορείτε να κανετέ τους υπολογισμούς με $\tilde{\lambda} = \lambda \times 10^{-9}$, $\tilde{\mu} = \mu \times 10^{-9}$, και $\tilde{\rho} = \rho \times 10^{-3}$ και μπορείτε να θεωρίσετε $\tilde{f}_0 = 10^{-3} \times f_0$. Σε αυτή την περίπτωση χώρος μετρίεται σε m και ο χρόνος σε $msec$.