

1η Εργαστηριακή Άσκηση.

Παράδοση: Θα γράψετε μία αναφορά στην οποία θα υπάρχουν οι απαντήσεις στα ερωτήματα και σχολιασμός των αποτελεσμάτων. Η παράδοση της άσκησης θα γίνει μέχρι την Κυριακή 29/4. Θα στείλετε με email ένα αρχείο της μορφής ΕΠΩΝΥΜΟ-ΑΜ.tgz στο οποίο θα περιέχεται η αναφορά σε μορφή ps ή pdf καθώς και ο κώδικας. Στην αναφορά θα αναγράφονται τα στοιχεία σας: ονοματεπώνυμο, ΑΜ, εξάμηνο σπουδών.

Θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργαστηριακή άσκηση με ένα στατικό πρόβλημα σε ετερογενή μέσο. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται σε διάφορες εφαρμογές : είναι π.χ η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή της θερμοκρασίας σε ένα υλικό με ετερογενή συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας (στην κατάσταση ισορροπίας). Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι μία ανοικτή, φραγμένη περιοχή με ομαλό σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$, και υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

$$k(x) \geq \alpha, \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

1. Θέλουμε να βρούμε την θερμοκρασία u σε ένα υλικό με θερμική αγωγιμότητα $k(x)$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

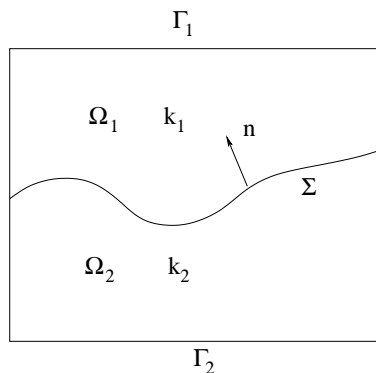
(α') Γράψτε τη μεταβολική μορφή του προβλήματος (2)

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (3)$$

(β') Δείξτε ότι το πρόβλημα (3) έχει μοναδική λύση.

2. Θεώρουμε τώρα ότι η περιοχή Ω χωρίζεται σε δύο υποπεριοχές $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, και ότι η θερμική αγωγιμότητα είναι σταθερή σε κάθε περιοχή

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{στην } \Omega_1 \\ k_2 & \text{στην } \Omega_2 \end{cases} \quad (4)$$

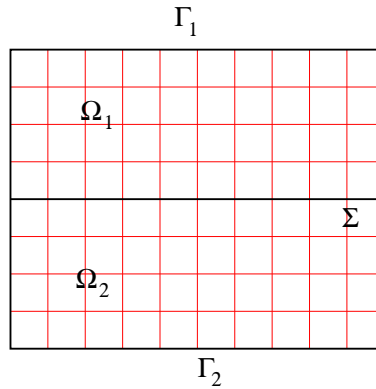


Σχήμα 1: Η περιοχή $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Συμβολίζουμε με Σ το σύνορο μεταξύ Ω_1 και Ω_2 , $\Sigma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, $\Gamma_j = \Gamma \cap \partial\Omega_j$, $j = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι $\Omega = [-1, 1]^2$ και θεωρούμε ότι $\Sigma = [-1, 1] \times \{y = 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ και $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα (3) χρησιμοποιώντας πεπερασμένα στοιχεία Q^1 . Φτιάξτε μια διακριτοποίηση της περιοχής Ω χρησιμοποιώντας τετράγωνα πλευράς h , $\Omega = \cup_{l=1}^{N_{el}} T_l$. Έστω N_{el} ο ολικός αριθμός πεπερασμένων στοιχείων, $(M_i)_{i=1..N_s}$ τα σημεία της διακριτοποίησης (οι κορυφές των τετραγώνων) όπου N_s είναι ο ολικός αριθμός των σημείων. Έχουμε $N_s = N_i + N_d$, με N_i τα εσωτερικά σημεία (που δεν ανοικούν στο σύνορο $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) και N_d τα σημεία που ανήκουν στο σύνορο Γ με την συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

(α') Κατασκευάστε ένα πλέγμα της περιοχής Ω , έτσι ώστε η διεπιφάνεια Σ να συμπίπτει με τις πλευρές των τετραγώνων (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Παράδειγμα διακριτοποίησης

Θα πρέπει να ορίσετε :

- (ι) N_{el}, N_i, N_d, N_s
- (ii) $coord(m, i)$, η i συντεταγμένη του σημείου m ($1 \leq m \leq N_s, 1 \leq i \leq 2$).
- (iii) $lg(l, i)$ ο ολικός αριθμός του σημείου i που ανήκει στο l στοιχείο ($1 \leq l \leq N_{el}, 1 \leq i \leq 4$).
- (iv) $ref(l)$ ένας δείκτης του στοιχείου l τέτοιος ώστε,

$$ref(l) = \begin{cases} 1 & \text{αν } T_l \subset \Omega_1 \\ 2 & \text{αν } T_l \subset \Omega_2 \end{cases}$$

Έστω V_h ,

$$V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{T_l} \in Q^1(T_l), \forall T_l, \}$$

και $(w_J)_{J=1, N_s}$, οι ολικές συναρτήσης βάσης,

$$w_J(M_I) = \delta_{IJ} \quad 1 \leq I, J \leq N_s$$

Η προσεγγιστική λύση του προβλήματος γράφεται σύμφωνα με την μέθοδο της παρεμβολής

$$u_h(x) = \sum_{J=1}^{N_s} u_J w_J(x)$$

(β') Δείξτε ότι το διακριτό πρόβλημα γράφεται σαν γραμμικό σύστημα :

$$KU = F \quad (5)$$

με $U = (u_J)_{J=1, N_s}$ και $u_J = 0$ εάν M_J ανήκει στο σύνορο Γ . Γράψτε ένα αλγόριθμο υπολογισμού του άκαμπτου πίνακα K και λάβετε υπόψη τη συνθήκη Dirichlet με τη μέθοδο που είπαμε στην τάξη.

Για τον υπολογισμό του δεύτερου μέλους προσεγγίζουμε το f με το f_h ,

$$f_h = \Pi_h f = \sum_{J=1}^{N_i} f_J w_J$$

με $f_J = f(M_J)$. Πώς γράφεται τώρα το δεύτερο μέλος ? (συμβολίζουμε με M τον πίνακα μάζας).

(γ') Γράψτε ένα πρόγραμμα επίλυσης του προσεγγιστικού προβλήματος.

(δ') Αρχικά τρέξτε το πρόγραμμα για την περίπτωση $k = \text{σταθερά}$. Χρησιμοποιήστε γνωστές ακριβείς λύσεις για να ελέγξετε το πρόγραμμά σας. Για παράδειγμα για $k = 1$ και $f(x, y) = -2((x^2 - 1) + (y^2 - 1))$ η ακριβής λύση είναι $u(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

(ε') Γράψτε ένα υποπρόγραμμα που να υπολογίζει το λάθος $u - u_h$ στη νόρμα $L^2(\Omega)$ και $H^1(\Omega)$. Να χρησιμοποιήσετε μία προσεγγιστική μέθοδο για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα,

$$\int_T f(x, y) dx dy = \text{mes}(T) \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \omega_k$$

με $M_k(x_k, y_k)$ τα σημεία της αριθμητικής ολοκλήρωσης και ω_k τους αντιστοιχούς συντελεστές (π.χ. μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Gauss Lobatto quadrature formula) :

- $M_1(0, 0), M_2(1, 0), M_3(1, 1), M_4(0, 1),$
 $M_5(1/2, 0), M_6(1, 1/2), M_7(1/2, 1), M_8(0, 1/2), M_9(1/2, 1/2)$
 και $\omega_i = 1/36, i = 1, \dots, 4, \omega_i = 1/9, i = 5, \dots, 8$ και $\omega_9 = 4/9$.

(ς') Με διαδοχικές διαμερίσεις ($h = 1/10, h = 1/20, h = 1/30, \dots$) βρείτε την τάξη σύγκλισης της μεθόδου (για το πρόβλημα με $k = 1$ και χρησιμοποιώντας την ακριβής λύση που αναφέρεται στο ερώτημα 2-(δ')).

(ζ') Τρέξτε το πρόγραμμα για

$$(k_1, k_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 10), (2, 1), (10, 1)$$

$$\text{και } f(x, y) = -2((x^2 - 1) + (y^2 - 1))$$

3. Το πρόγραμμά σας μπορείτε να το γράψετε σε FORTRAN, C, MATLAB(C δεν ξέρω!). Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος σε FORTRAN χρησιμοποιήστε μία από τις subroutines lapack (SPORTS για παράδειγμα).