ΕΜ 181: Αριθμητική Ανάλυση Ι (Ακαδ. έτος 2010–2011)

Τετάρτη 3 Νοεμβρίου 2010

2η Εργαστηριακή Άσκηση

1. **Εξοικείωση με το matlab.**

(α′) Να γραφεί συνάρτηση στο matlab που να κατασκευάζει τριδιαγώνιους $(n \times n)$ πίνακες της μορφής

$$T = \begin{pmatrix} a & c & & & \\ b & a & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & c \\ & & & b & a \end{pmatrix}.$$

Η συνάρτηση πρέπει να δέχεται ως είσοδο τη διάσταση του πίνακα (n), καθώς και τα a, b, c, και να επιστρέφει τον τριδιαγώνιο πίνακα T.

(β′) Να γραφεί συνάρτηση στο matlab που να κατασκευάζει τον τετραγωνικό $(n \times n)$ πίνακα

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & -1 & \cdots & -1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{array}\right),$$

όπου ο κάτω δεξιά υποπίνακας nI_{n-m} έχει διάσταση $(n-m) \times (n-m)$ (υποθέτουμε ότι $m < n$). Η συνάρτηση πρέπει να δέχεται ως είσοδο τα m και n και να επιστρέφει τον πίνακα M.

(γ′) Κατασκευάστε τους πίνακες T και M των ερωτημάτων (1α′) και (1β′) με $n = 8$, $m = 5$, $a = 5$, $b = c = -2$, και υπολογίστε με το matlab:

i. Το άθροισμα $S = T + M$ και το γινόμενο $P = TM$.

ii. Τις ιδιοτιμές του M και το διάνυσμα των διαγωνίων στοιχείων του M.

iii. Την ορίζουσα του M και το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του M.

iv. Τον πίνακα X με στοιχεία $X_{ij} = P_{ij}^2$.

v. Το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του πίνακα X.

vi. Τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_2$ των πινάκων M και T. Υπενθυμίζω ότι έχουμε

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\ \|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \varrho(A^TA) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|, \end{aligned}$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του A^TA.

vii. Τον δείκτη κατάστασης κ των πινάκων M και T ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_2$. Υπενθυμίζω ότι έχουμε

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

(Προσοχή: ο δείκτης κατάστασης εξαρτάται απο την νόρμα που χρησιμοποιούμε)

2. **Επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος με τη μέθοδο LU.** Θεωρούμε τριδιαγώνιους πίνακες της μορφής T (βλέπε ερώτημα 1α΄). Γράψτε ένα πρόγραμμα για την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$Tx = f,\ f \in \mathbb{R}^n.$$

Η ιδέα είναι να αναλύσουμε τον T σε γινόμενο $T = LU$, οπότε για να λύσουμε το σύστημα $Tx = f$, το γράφουμε ως $L\underbrace{Ux}_{y} = f$ και υπολογίζουμε καταρχήν το y λύνοντας το σύστημα $Ly = f$, και στη συνέχεια το x λύνοντας το σύστημα $Ux = y$.

Για την ανάλυση LU για τριδιαγωνιους πίνακες της μορφης του T, υπολογίστε τους πίνακες

$$L = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & & \\ b & \delta_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & b & \delta_{n-1} & \\ & & & b & \delta_n \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1 & & & \\ & 1 & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \varepsilon_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix};$$

Όπου τα δ_i και ε_i υπολογίζονται από

$$\begin{aligned} &\delta_1 = a \\ &\varepsilon_1 = c/a \\ &\text{ for k=2, ..., n-1} \\ &\quad \delta_k = a - b\cdot\varepsilon_{k-1} \\ &\quad \varepsilon_k = c/\delta_k \\ &\text{end} \\ &\delta_n = a - b\cdot\varepsilon_{n-1} \end{aligned}$$

Η επίλυση $Ly = f$ μπορεί να γίνει ως

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1/\delta_1 \\ &\text{for k=2, ..., n} \\ &\quad y_k = (f_k - b\cdot y_{k-1})/\delta_k \\ &\text{end} \end{aligned}$$

και τέλος λύνουμε το $Ux = y$

$$\begin{aligned} &x_n = y_n \\ &\text{for k=n-1, ..., 1} \\ &\quad x_k = y_k - \varepsilon_k\cdot x_{k+1} \\ &\text{end} \end{aligned}$$

Το πρόγραμμα πρέπει να δέχεται ως είσοδο τη διάσταση του πινακα n, τα a, b, c και το διάνυσμα f και να επιστρέφει τη λύση x. Επαληθεύστε ότι για $n = 8$, $a = 5$, $b = c = -2$ και $f = (8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/64)^T$ η λύση είναι $x = (2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64)^T$.

3. **Επίλυση συστήματος με τη μέθοδο Jacobi.** Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, η επαναληπτική μέθοδος Jacobi για την επίλυση του συστήματος $Ax = f$, ορίζεται από

$$Dx^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + f, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

όπου $A = L + D + U$, με D τον πίνακα των διαγωνίων στοιχείων του A, L το αυστηρά κάτω τριγωνικό μέρος του A, U το αυστηρά άνω τριγωνικό μέρος του A, και $x^{(0)}$ μια δοσμένη αρχική εκτίμηση της λύσης x.

Γράψτε ένα πρόγραμμα matlab που να λύνει το σύστημα $Ax = f$ με τη μέθοδο Jacobi. Οι επαναλήψεις θα σταματούν είτε όταν

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} \leq \texttt{TOL} = 10^{-6},$$

ή όταν $k \geq \texttt{MAXIT} = 100$. Θεωρήστε ως αρχική εκτίμηση της λύσης την $x^{(0)} = (0, \ldots, 0)^T$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να δέχεται ως είσοδο τον πίνακα A και το διάνυσμα f και να επιστρέφει τη λύση, καθώς και τον αριθμό επαναλήψεων που χρειάστηκαν για να συγκλίνει, ή ένα κατάλληλο μήνυμα σε περίπτωση που εξαντλήθηκε ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμά σας για να λυσετε το σύστημα $Mx = f$ με M τον πίνακα του ερωτήματος 1β′ (παρατηρήστε ότι σ′ αυτή τη περίπτωση $U = 0$) με $n = 8, m = 5$ και $f = (8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/64)^T$. Η λύση είναι $x = (8, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 + 1/512)^T$.

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

- Κατά την εξέταση εννοείται ότι θα έχετε μαζί σας τα προγράμματα που εκτελούν τα παραπάνω.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει τη Δευτέρα 22/11/2010.
- Η εξέταση είναι ατομική!
- Όποιος θέλει μπορεί να φέρει τον προσωπικό του υπολογιστή στην εξέταση.
- Στην εξέταση θα πρέπει να έχετε μαζί σας την φοιτητική σας ταυτότητα.