

1η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα matlab, το οποίο να προσεγγίζει μία ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ με τη μέθοδο του Νεύτωνα. Δηλ. το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τους όρους x_n της ακολουθίας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου x_0 δεδομένη αρχική προσέγγιση της ρ . Οι συναρτήσεις f και f' θα πρέπει να υπολογίζονται είτε inline ή ως functions. Ως δεδομένα εισόδου θα πρέπει να δίνονται η αρχική προσέγγιση x_0 , και οι παράμετροι $TOL > 0$ και $NMAX$ (φυσικός). Ως κριτήριο τερματισμού θα χρησιμοποιείται το εξής: Αν $|x_{n+1} - x_n| \leq TOL$ για πρώτη φορά, τότε θεωρήσε το x_{n+1} ως «ρίζα». Για ασφάλεια εκτελέστε το πολύ $NMAX$ επαναλήψεις.

Σε κάθε βήμα n , το πρόγραμμά σας θα πρέπει να εκτυπώνει τις τιμές των n , x_n , $f(x_n)$ και $|x_{n+1} - x_n|$. Αν το πρόγραμμα κάνει $NMAX$ επαναλήψεις χωρίς να βρει την ρίζα με ακρίβεια TOL , τότε πρέπει το πρόγραμμα να εμφανίζει το μήνυμα M1: «Could converge after $NMAX$ iterations». Το προγράμμά σας πρέπει να ελέγχει ότι $f'(x_n) \neq 0$, στην αντίθετη περίπτωση πρέπει να σταματάει και να τυπώνει το μήνυμα M2: «Newton's method is not well defined at x_n ».

2. Αποδείξτε αναλυτικά (δηλ. με μελέτη συναρτησης) ότι η εξίσωση $f(x) := 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες ρ_1 , ρ_2 και ρ_3 και σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1 (που υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα), με παραμέτρους x_0 , TOL και $NMAX$ της επιλογής σας, για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ριζών. (Οι ρίζες που θα πρέπει να βρείτε είναι $\rho_1 = 1.5$, $\rho_2 = 2$ και $\rho_3 = 3$.) Τέλος, πάρτε $TOL = 1.e-6$, $NMAX = 50$ και τρέξτε το πρόγραμμά σας με $x_0 = 1, 1.8, 2.5, 2.8, 5$ και $\frac{26-\sqrt{28}}{12}, \frac{26+\sqrt{28}}{12}$. Τι παρατηρείτε;
3. Αποδείξτε αναλυτικά (δηλ. με μελέτη συναρτησης) ότι η εξίσωση $f(x) := 3^{-x} - 5x$ έχει μία μοναδική πραγματική ρίζα ρ και παρατηρήστε ότι $\rho \in [0, 4]$. Σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της $f(x)$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα του Ερωτήματος 1 (που υλοποιεί τη μέθοδο του Νεύτωνα), με παραμέτρους $x_0 = 4$, $TOL = 1.e - 6$ και $NMAX = 50$ για να υπολογίσετε την ρ . Τρέξτε το πρόγραμμα bisection.m με παράμετρους $a = 0, b = 4$ και $TOL = 1.e - 6$. Σε πόσες επαναλήψεις συγκλίνει η μέθοδος του Νεύτωνα και σε πόσες της διχοτόμησης; Γιατί;
4. Σχεδιάστε με την βοήθεια του matlab την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 8x^3 - 6 \arctan(2x)$ και παρατηρήστε ότι έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες (τις $-\rho, 0, \rho$, όπου $\rho > 0$). Χρησιμοποιώντας $TOL = 1.e - 06$ και $NMAX = 50$, υπολογίστε τις ρίζες με $x_0 = -1, -0.6, -0.4, -0.2, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.9$ και 1. Τι παρατηρείτε;

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει τη Δευτέρα 25/10/2010.
- Η εξέταση είναι ατομική!
- Όποιος θέλει μπορεί να φέρει τον προσωπικό του υπολογιστή στην εξέταση.
- Στην εξέταση θα πρέπει να έχετε μαζί σας την φοιτητική σας ταυτότητα.