ΤΕΜ-161, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 7 Ιουνίου 2013

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα, διάρκεια: 2 ώρες και 30 λεπτά.

Διδάσκων: Δημήτρης Τσαγκαρογιάννης

Θέμα 1ο: Έστω ότι έχουμε δύο νομίσματα εκ των οποίων το ένα είναι τίμιο και το άλλο έχει και στις δύο όψεις "κεφαλή". Στρίβουμε ένα στην τύχη και φέρνουμε "κεφαλή". Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι το τίμιο νόμισμα; Αν το ξαναστρίψουμε και φέρουμε "γράμματα" ποιά είναι τότε η πιθανότητα να είναι το τίμιο;

Λύση: Έστω T το ενδεχόμενο να είναι το τίμιο νόμισμα και K το ενδεχόμενο να έρθει "κεφαλή". Τότε

$$P(T|K) = \frac{P(T \cap K)}{P(K)} = \frac{P(K|T)P(T)}{P(K|T)P(T) + P(K|T^c)P(T^c)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}}$$

Στο δεύτερο ερώτημα η πιθανότητα είναι 1 αφού θα έχουμε φέρει δύο διαφορετικά αποτελέσματα και υπάρχει ένα μόνο νόμισμα που δίνει αυτή τη δυνατότητα. $\square$

Θέμα 2ο: Αν σε ένα στρογγυλό τραπέζι n θέσεων καθίσουν $k(< n)$ άτομα, ποιά η πιθανότητα να καταληφθούν k διπλανές θέσεις;

Λύση: Έχουμε n τέτοιες περιπτώσεις, οπότε η πιθανότητα θα είναι $\frac{n}{\binom{n}{k}}$. $\square$

Θέμα 3ο: Έστω ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ακολουθεί κατανομή Poisson (διακριτή) με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{2}$: $P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, για $i = 0, 1, 2, \ldots$ και 0 αλλιώς. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να υπάρχει (α) κανένα, (β) τουλάχιστον ένα και (γ) τουλάχιστον δύο λάθη σε μια δεδομένη σελίδα.

Λύση: Έστω X ο αριθμός των λαθών σε μια σελίδα. Τότε $P(X = 0) = e^{-1/2}$,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/2}$$

και

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-1/2} - e^{-1/2}.$$

$\square$

Θέμα 4ο: Η συνάρτηση κατανομής της τ. μ. X δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x < 0 \\ x/2, & \text{για } 0 \leq x < 1 \\ 2/3, & \text{για } 1 \leq x < 2 \\ 11/12, & \text{για } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{για } 3 \leq x \end{cases}$$

Να υπολογίσετε $P(X < 3)$, $P(X = 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$ και $P(2 < X \leq 4)$.

Λύση: Έχουμε $P(X<3)=F(3-)=\frac{11}{12}$, $P(X=1)=P(X=1+)-P(X=1-)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$, $P(X>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2})=1-F(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ και $P(2<X\le 4)=F(4)-F(2)=\frac{1}{12}$. □

Θέμα 5ο: Αν η τ.μ. X έχει πυκνότητα πιθανότητας f_X, να δείξετε ότι η τ.μ. $Y=|X|$ έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y), \qquad y\ge 0.$$

Λύση: Η τ.μ. Y παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, οπότε για $y\ge 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(|X|\le y) \\ &= P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y) \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς y, για $y\ge 0$ παίρνουμε:

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(y)+f_X(-y).$$

□

Θέμα 6ο: Έστω η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X και Y:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & \text{για } 0<x<\infty,\ 0<y<\infty \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρείτε την $f_{X|Y}(x|y)$ και να δείξετε ότι $P(X>1|Y=y)=e^{-1/y}$.

Λύση: Έχουμε:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{e^{-x/y}e^{-y}/y}{e^{-y}\int_0^\infty(1/y)e^{-x/y}dx}=\frac{1}{y}e^{-x/y}$$

Άρα,

$$P(X>1|Y=y)=\int_1^\infty \frac{1}{y}e^{-x/y}dx=-e^{-x/y}|_1^\infty=e^{-1/y}.$$

□

Θέμα 7ο: Έστω X_1, X_2, X_3 και X_4 ανεξάρτητες τ.μ. με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης

$$\rho(Z,W):=\frac{E(ZW)-E(Z)E(W)}{(VarZ)^{1/2}(VarW)^{1/2}}$$

για τα ζεύγη: (α) X_1+X_2 και X_2+X_3 και (β) X_1+X_2 και X_3+X_4.

Λύση: Έχουμε ότι $E((X_1+X_2)(X_2+X_3)) - E(X_1+X_2)E(X_2+X_3) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 1$. Επίσης, $Var(X_1+X_2) = 1+1 = 2$. Άρα

$$\rho(X_1+X_2, X_2+X_3) := \frac{1}{2^{1/2}2^{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Στη δεύτερη περίπτωση ο συντελεστής συσχέτισης είναι μηδέν αφού τα X_1+X_2 και X_3+X_4 είναι ανεξάρτητα. □

Θέμα 8ο: Από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ξέρουμε ότι για $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = \Phi(x)$$

με $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, όπου $X_1, \ldots$ είναι ανεξάρτητες ομοκατανεμημένες τ.μ. με μέσο μ και διασπορά σ^2. Επίσης, $\Phi(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής $\mathcal{N}(0,1)$ και έστω ότι είναι γνωστές όλες οι τιμές $\Phi(x)$. Με βάση το παραπάνω θεώρημα, αν ρίξουμε 10 τίμια ζάρια να βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι μεταξύ 30 και 40 (συμπεριλαμβανομένου του δεύτερου).

Λύση: Έχουμε $E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$, $VarX_i = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{35}{12}$. Οπότε

$$P(30 < S_{10} \leq 40) = P\left(\frac{30-35}{\sqrt{\frac{35}{12}10}} < \frac{S_{10}-35}{\sqrt{\frac{35}{12}10}} \leq \frac{40-35}{\sqrt{\frac{35}{12}10}}\right) \sim \Phi(\frac{5}{\sqrt{\frac{35}{12}10}}) - \Phi(\frac{-5}{\sqrt{\frac{35}{12}10}}).$$

□

Θέμα 9ο: Η ανισότητα του Chebyshev μας δίνει ότι αν X είναι τ.μ. με μέσο μ και διασπορά σ^2, τότε για κάθε τιμή $\delta > 0$, έχουμε ότι

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{\delta^2}.$$

Αν η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(0,10)$ να βρείτε ένα άνω όριο για την πιθανότητα $P(|X-5| \geq 4)$. Πόσο είναι η ακριβής τιμή της;

Λύση: Έχουμε ότι $E(X) = 5$ και $\sigma^2 = VarX = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{25}{3}$. Οπότε

$$P(|X-5| \geq 4) \leq \frac{25/3}{16}.$$

Ενώ η ακριβής τιμή της είναι

$$P(|X-5| \geq 4) = P(X > 9) + P(X < 1) = 1 - \frac{9}{10} - \frac{1}{10}$$

αφού η συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης κατανομής είναι $F(x) = \frac{x}{10}$, για $x \in (0,10)$. □

Θέμα 10ο: Έστω η κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

και συνάρτηση κατανομής $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$. Για $\sigma = 1$ και $\mu = 0$ την ονομάζουμε τυπική κανονική κατανομή (τη συμβολίζουμε με $\phi(x)$) και γνωρίζουμε αριθμητικά όλες τις τιμές $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$. Να δείξετε ότι $F(\mu + \sigma z) = \Phi(z)$, $-\infty < z < \infty$. Έστω τ.μ. X που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο $\mu = 5$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 2$. Να δείξετε ότι η τ.μ. $Z := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(1 < X < 8)$.

Λύση: Έχουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. Z δίνεται από

$$P(Z \leq z) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z) = P(X \leq \mu + \sigma z) = F(\mu + \sigma z) = \Phi(z)$$

άρα ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = \frac{1}{\sigma}dx$:

$$F(\mu + \sigma z) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} f(x)dx = \int_{-\infty}^{z} \phi(y)dy = \Phi(z).$$

Οπότε

$$P(1 < X < 8) = P(\frac{1-5}{2} < \frac{X-5}{2} < \frac{8-5}{2}) = P(-2 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-2).$$

$\square$