ΤΕΜ-161, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΕΞΕΤΑΣΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013, (**2,5 ώρες**)

Διδάσκων: Δημήτρης Τσαγκαρογιάννης

Θέμα 1ο: Ένα κουτί περιέχει 3 νομίσματα με "κεφαλή" και από τις δύο πλευρές, 4 νομίσματα με μόνο "γράμματα" και 2 κανονικά νομίσματα (με κεφαλή και γράμματα). Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από αυτά τα 9 νομίσματα και κάνουμε μια ρίψη, ποιά είναι η πιθανότητα να έρθει "κεφαλή";

Λύση: Έστω K το ενδεχόμενο να έρθει "κεφαλή" σε μια τυχαία ρίψη και έστω A (αντίστοιχα B και C) το ενδεχόμενο να έχουμε επιλέξει κάποιο νόμισμα από τα 3 πρώτα (αντίστοιχα από τα επόμενα 4 ή από τα τελευταία 2). Ισχύει ότι $P(A) = \frac{3}{9}$, $P(B) = \frac{4}{9}$ και $P(C) = \frac{2}{9}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap A) + P(K \cap B) + P(K \cap C) \\ &= P(A)P(K|A) + P(B)P(K|B) + P(C)P(K|C) = \frac{3}{9}1 + \frac{4}{9}0 + \frac{2}{9}\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Θέμα 2ο: Από ένα σύνολο 150 φοιτητριών και 100 φοιτητών φτιάχνουμε μια ομάδα αποτελούμενη από δύο υπο-ομάδες η μία με 10 άντρες και η άλλη με 15 γυναίκες. Να βρείτε πόσες τέτοιες ομάδες μπορούμε να φτιάξουμε
(α) αν μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης σε κάθε υπο-ομάδα και
(β) αν εξετάζουμε μόνο το ποια άτομα συμμετέχουν.

Λύση: Στο (α) μας ενδιαφέρουν τα διατεταγμένα δείγματα, οπότε έχουμε:

$$(100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 91) \cdot (150 \cdot 149 \cdot \ldots \cdot 136)$$

ενώ αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά (περίπτωση β) εξετάζουμε τους συνδυασμούς:

$$\binom{100}{10}\binom{150}{15}.$$

$\square$

Θέμα 3ο: Αν η τ.μ. X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρους n και p να δείξετε ότι καθώς το k παίρνει τιμές από 0 έως n, η συνάρτηση πυκνότητας της διωνυμικής κατανομής αρχικά αυξάνει (παίρνοντας τη μέγιστη τιμή της στο μέγιστο k για το οποίο ισχύει $k \leq (n+1)p$) και μετά μειώνεται.

Λύση: Έχουμε:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$$

οπότε $P(X=k) \geq P(X=k-1)$ αν και μόνο αν $k \leq (n+1)p$. $\square$

Θέμα 4ο: Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x < 0 \\ x/3, & \text{για } 0 \leq x < 1 \\ 2/3, & \text{για } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{για } 2 \leq x \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(X = 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$, $P(X < 2)$ και $P(1 < X \leq 2)$. Ποιά είναι η συνάρτηση πυκνότητας;

Λύση: Έχουμε $P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = P(X = 1+) - P(X = 1-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, $P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{6}$, $P(X < 2) = F(2-) = \frac{2}{3}$ και $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{2}{3}$. $\square$

Θέμα 5ο: (1,5 μονάδα)Έστω ότι ο χρόνος ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής είναι μια τ.μ. X που ακολουθεί την παρακάτω κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x \leq 10 \\ 10/x^2, & \text{για } x > 10. \end{cases}$$

Να βρείτε (α) την πιθανότητα $P(X > 15)$, (β) τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X και (γ) την πιθανότητα ανάμεσα σε 6 τέτοιες συσκευές τουλάχιστον 3 να λειτουργήσουν για τουλάχιστον 15 ώρες (θεωρώντας ότι τα ενδεχόμενα μια δεδομένη λάμπα να διαρκεί τουλάχιστον 15 ώρες είναι ανεξάρτητα και άρα χρησιμοποιώντας τη διωνυμική κατανομή).

Λύση: Έχουμε

$$\int_{15}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = \frac{-10}{x} |_{15}^{\infty} = \frac{2}{3}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(y) = \int_{10}^{y} \frac{10}{x^2} dx = 1 - \frac{10}{y}, \quad y > 10$$

και $F(y) = 0$ για $y < 10$. Τέλος, αφού τα ενδεχόμενα μια δεδομένη λάμπα να διαρκεί τουλάχιστον 15 ώρες είναι ανεξάρτητα (και κάθε τέτοιο συμβαίνει με πιθανότητα 2/3) από την διωνυμική κατανομή θα έχουμε:

$$\sum_{i \geq 3} \binom{6}{i} (\frac{2}{3})^i (\frac{1}{3})^{6-i}.$$

Θέμα 6ο: Έστω η από κοινού πυκνότητα των τ.μ. X και Y:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)}, & \text{για } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες; Για την $f(x,y)$ που δίνεται από τη σχέση

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{για } 0 < x < y,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

Λύση: Ναι, καθώς $f_X(x) = \int_0^\infty xe^{-(x+y)}dy = xe^{-x}$ και $f_Y(y) = e^{-y}$, οπότε $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Στη δεύτερη περίπτωση, οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες καθώς

$$f_X(x) = \int_x^1 f(x,y)dy = 2(1-x), \quad 0 < x < 1$$

και

$$f_Y(y) = \int_0^y f(x,y)dx = 2y, \quad 0 < y < 1,$$

άρα $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. □

Θέμα 7ο: Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι δύο φορές (τα δύο αποτελέσματα είναι ανεξάρτητα με την ίδια κατανομή). Έστω X η τ.μ. του αθροίσματος των δύο αποτελεσμάτων και Y η τ.μ. της διαφοράς του πρώτου μείον το δεύτερο. Να υπολογίσετε τη συσχέτιση $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Λύση: Έστω W_1 και W_2 οι τ.μ. των αποτελεσμάτων των δύο ρίψεων. Έχουμε $X = W_1 + W_2$ και $Y = W_1 - W_2$. Οπότε

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= Cov(W_1 + W_2, W_1 - W_2) \\ &= E((W_1 + W_2)(W_1 - W_2)) - E(W_1 + W_2)E(W_1 - W_2) \\ &= E(W_1^2 - W_2^2) - E(W_1)^2 - E(W_2)^2 = Var(W_1) - Var(W_2) = 0 \end{aligned}$$

αφού οι δύο ρίψεις έχουν την ίδια κατανομή. □

Θέμα 8ο: Έστω X_i, $i = 1, \ldots, 10$ ανεξάρτητες τ.μ. και κάθε μία ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(0,1)$. Να υπολογίσετε μια προσέγγιση της πιθανότητας

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\}$$

θεωρώντας γνωστές όλες τις τιμές της κανονικής κατανομής. (Σημείωση: από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ξέρουμε ότι για $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x) = \Phi(x)$$

με $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, όπου $X_1, \ldots$ είναι ανεξάρτητες ομοκατανεμημένες τ.μ. με μέσο μ και διασπορά σ^2. Επίσης, $\Phi(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής $\mathcal{N}(0,1)$ και έστω ότι είναι γνωστές όλες οι τιμές $\Phi(x)$.)

Λύση: Από την ομοιόμορφη κατανομή έχουμε ότι $E[X_i] = \frac{1}{2}$ και $Var(X_i) = \frac{1}{12}$. Τότε από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε ότι

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 5}{\sqrt{10\frac{1}{12}}} > \frac{6-5}{\sqrt{10\frac{1}{12}}}\right\} \sim 1 - \Phi(\sqrt{1.2}).$$

□

Θέμα 9ο:(1,5 μονάδα) Έστω X τ.μ. με θετικές τιμές. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει ότι

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

(α) Να δείξετε ότι αν η X έχει μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, τότε για κάθε $a > 0$

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

(β) Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. όμοια κατανεμημένες με μέσο $E[X_1] = \ldots = E[X_n] = \mu$ και διασπορά $Var(X_1) = \ldots = Var(X_n) = \sigma^2$, τότε

$$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \mu \qquad \text{και} \quad Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(γ) Τέλος, να δείξετε ότι για κάθε $\epsilon > 0$,

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

Λύση: Αφού η τ.μ. $(X-\mu)^2$ παίρνει θετικές τιμές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη ανισότητα και να έχουμε:

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(|X - \mu|^2 \geq a^2) \leq \frac{E(|X - \mu|^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Για την τ.μ. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ εφαρμόζοντας τον ορισμό μετά από απλές πράξεις έχουμε ότι

$$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \mu \qquad \text{και} \quad Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Οπότε

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει καθώς $n \to \infty$. $\square$