ΤΕΜ-161, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 5η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 15.05.2013

1η άσκηση: Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2 και X_3 με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$. Να υπολογίσετε την ποσότητα

$$E[(X_1 - 2X_2 + X_3)^2].$$

Λύση: Έχουμε: $E[(X_1 - 2X_2 + X_3)^2] =$

$$\begin{aligned} &= E[X_1^2] + 4E[X_2^2] + E[X_3^2] - 4E[X_1X_2] + 2E[X_1X_3] - 4E[X_2X_3] \\ &= E[X_1^2] + 4E[X_2^2] + E[X_3^2] - 4E[X_1]E[X_2] + 2E[X_1]E[X_3] - 4E[X_2]E[X_3] \end{aligned}$$

αφού οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες. Επίσης, αφού έχουν ομοιόμορφη κατανομή τότε $E[X_i] = 1/2$ και $E[X_i^2] = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$ για $i = 1, 2, 3$. □

2η άσκηση: Έστω ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο είναι το ίδιο πιθανό να κερδίσουμε ή να χάσουμε. Αν κερδίσουμε διπλασιάζουμε την περιουσία μας, ενώ αν χάσουμε την υποδιπλασιάζουμε. Έστω ότι ξεκινάμε με ένα ποσό c. Ποιά θα είναι η μέση τιμή της περιουσίας μας αν παίξουμε n φορές (ανεξάρτητες επαναλήψεις του παιχνιδιού);

Λύση: Έστω η τ.μ. X_i, $i = 1, \ldots, n$ που δηλώνει αν διπλασιάσαμε ή υποδιπλασιάσαμε την i-οστή φορά που παίξαμε. Δηλαδή $X_i = 2$ ή $X_i = \frac{1}{2}$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Έχουμε ότι

$$E[X_i] = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}.$$

Την πρώτη φορά η περιουσία μας θα γίνει cX_1, τη δεύτερη cX_1X_2 κ.ο.κ. Οπότε αφού τα $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητα μετά το n-οστό παιχνίδι η μέση τιμή της περιουσίας μας θα είναι:

$$E[cX_1 \ldots X_n] = cE[X_1] \ldots E[X_n] = c\left(\frac{5}{4}\right)^n.$$

□

3η άσκηση: Έστω δύο τ.μ. X και Y με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y), & \text{για } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την τιμή $Var(2X - 3Y + 8)$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_0^2 x\frac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = \frac{5}{9}, \\
E(Y) &= \int_0^1 \int_0^2 y\frac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = \frac{11}{9}, \\
E(X^2) &= \int_0^1 \int_0^2 x^2\frac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = \frac{7}{18}, \\
E(Y^2) &= \int_0^1 \int_0^2 y^2\frac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = \frac{16}{9}, \\
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^2 xy\frac{1}{3}(x+y)\,dy\,dx = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{7}{18} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{13}{162} \\
Var(X) &= \frac{16}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{23}{81} \\
Cov(XY) &= \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{11}{9}\right) = -\frac{1}{81}
\end{aligned}$$

και αφού $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ προκύπτει ότι

$$Var(2X - 3Y + 8) = 4\,Var(X) + 9\,Var(Y) - 2\cdot 2\cdot 3\,Cov(X,Y) = \frac{245}{81}$$

□

4η άσκηση: (Ανισότητα του Jensen)
Έστω g μια κυρτή συνάρτηση δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και έστω X τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε $E[g(X)] \geq g(E[X])$.

Ιδέα: αναπτύξτε τη συνάρτηση $g(X)$ γύρω από τη μέση τιμή $E[X]$ της X χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor που λέει ότι αν $g(x)$ έχει δύο συνεχείς παραγώγους στο σημείο x_0, τότε υπάρχει y μεταξύ x_0 και x τέτοιο ώστε

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}g''(y).$$

Λύση: Έχουμε

$$g(X) = g(E[X]) + (X - E[X])g'(E[X]) + \frac{(X - E[X])^2}{2} g''(y).$$

για κάποιο y μεταξύ X και $E[X]$. Παίρνουμε τη μέση τιμή και στα δύο μέλη και αφού $E[X - E[X]] = 0$ και $g''(y) \geq 0$ (αφού η g είναι κυρτή) προκύπτει το αποτέλεσμα. $\square$