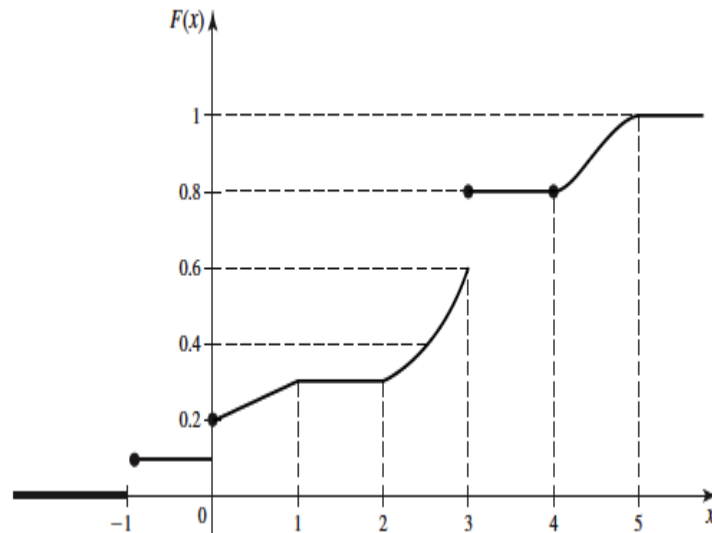


Ημερομηνία παράδοσης: Τετάρτη 17.04.2013

1η άσκηση: Έστω η συνάρτηση κατανομής F μιας τυχαίας μεταβλητής X που δίνεται από το παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τα παρακάτω: $P(X = -1)$, $P(X < 0)$, $P(X \leq 0)$,



$P(X = 1)$, $P(0 < X \leq 3)$, $P(0 < X < 3)$, $P(0 \leq X \leq 3)$, $P(1 < X \leq 2)$, $P(1 \leq X \leq 2)$, $P(X > 5)$, $P(X \geq 5)$ και $P(3 \leq X \leq 4)$.

Λύση: Έχουμε: $P(X = -1) = F(-1) - F(-1^-) = 0.1$, $P(X < 0) = F(0^-) = 0.1$, $P(X \leq 0) = F(0) = 0.2$, $P(X = 1) = F(1^+) - F(1^-) = 0$, $P(0 < X \leq 3) = F(3) - F(0) = 0.6$, $P(0 < X < 3) = F(3^-) - F(0) = 0.4$, $P(0 \leq X \leq 3) = F(3) - F(0^-) = 0.7$, $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = 0$, $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1^-) = 0$, $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 0$, $P(X \geq 5) = 1 - F(5^-) = 0$ και $P(3 \leq X \leq 4) = F(4) - F(3^-) = 0.2$. \square

2η άσκηση: Δείτε τις ασκήσεις 7 και 12 του κεφαλαίου 3 της αναφοράς [1].

Λύση: Δείτε τις απαντήσεις στην αναφορά [1]. Για την 7, έχουμε $P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - \frac{25}{100}$. $P(2,6 < X < 12,2) = \frac{10}{100}$ αφού έχουμε 10 από τους αριθμούς $\{0, 1, \dots, 99\}$ μεταξύ 2,6 και 12,2 κλπ. Για την 12, για το ενδεχόμενο $\{Y \leq y\}$ αρκεί να τοποθετήσουμε τους n βώλους στις θέσεις από 1 έως και y . Ομοίως και για το ενδεχόμενο $\{Z \geq z\}$ για το οποίο θέλουμε να έχουμε και τους n βώλους μετά το z , οπότε θέλουμε να τους βάλουμε από τη θέση z έως τη θέση r (άρα $r - z + 1$ θέσεις). \square

3η άσκηση: Έστω ένα κουτί με μπάλες εκ των οποίων το 10% είναι κόκκινες. Αν διαλέξουμε τυχαία 20 μπάλες με επανατοποθέτηση ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε

περισσότερες από τρεις κόκκινες; (Συμβουλευτείτε τον πίνακα της διωνυμικής κατανομής που μπορείτε να βρείτε στο internet.)

Λύση: Αφού επιλέγουμε με επανατοποθέτηση, ο αριθμός τών κόκκινων μπαλών ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 20$ και $p = 0.1$. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να πάρουμε περισσότερες από τρεις κόκκινες, είτε προσθέτουμε όλες τις τιμές από τον αντίστοιχο πίνακα της διωνυμικής κατανομής από 4 και πάνω, είτε αφαιρούμε από το 1 τις τιμές για 0, 1, 2 και 3. \square

4η άσκηση: Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f μιας τυχαίας μεταβλητής X :

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- (1) Να βρείτε την τιμή της σταθεράς c και να σχεδιάσετε την f .
- (2) Να υπολογίσετε την $P(1 < X < 2)$.

Λύση:

(1) Έχουμε

$$1 = \int_0^{\infty} ce^{-2x} dx = \frac{1}{2}c$$

(2) Οπότε

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x) dx = e^{-2} - e^{-4}.$$

\square