TEM-161, ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, 2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ημερομηνία παράδοσης: Πέμπτη 28.03.2013

1η άσκηση: Έστω n και k θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε n, k και $n-k\to\infty$. Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Stirling να δείξετε ότι

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{[2\pi n\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})]^{1/2}} e^{nS(\frac{k}{n})} \left(1+O(n^{-1/2},k^{-1/2},(n-k)^{-1/2})\right)$$

όπου

$$S(x) = -x\ln x-(1-x)\ln(1-x), \qquad x\in[0,1].$$

Λύση: Έχουμε:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi(n-k)}(\frac{n-k}{e})^{n-k}\sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k} \left(1+O(n^{-1/2},k^{-1/2},(n-k)^{-1/2})\right)$$

όπου

$$\frac{(\frac{n}{e})^n}{(\frac{n-k}{e})^{n-k}(\frac{k}{e})^k} = e^{n\ln n-(n-k)\ln(n-k)-k\ln k} = e^{n[\ln n-\frac{k}{n}\ln k-(1-\frac{k}{n})\ln(1-\frac{k}{n})]} = e^{n[-\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n}-(1-\frac{k}{n})\ln(1-\frac{k}{n})]}$$

$\square$

2η άσκηση: Δείτε την άσκηση 14 του κεφαλαίου 2 της αναφοράς [1].

Λύση: Δείτε τις ασκήσεις που κάναμε στην τάξη, καθώς και τις απαντήσεις στην αναφορά [1]. $\square$

3η άσκηση: Ένα εστιατόριο έχει n διαφορετικά μενού. Αν μια δεδομένη ημέρα έχει k πελάτες που ο καθένας επιλέγει από ένα μενού (όχι υποχρεωτικά διαφορετικό από τους άλλους), να δείξετε ότι ο αριθμός των δυνατών διαφορετικών συνδυασμών, αν δεν ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, είναι $\binom{n+k-1}{k}$.

Λύση: Κάθε συνδυασμός δίνεται από τη n-άδα $(m_1,\ldots,m_n)$ όπου m_i είναι ο αριθμός των πελατών που προτίμησαν το μενού i. Ισχύει ότι $0\le m_i\le n$, $\forall i$ και $m_1+\ldots+m_n=k$. Κάθε τέτοιο στοιχείο μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα που έχει m_1 μηδενικά (0) που χωρίζονται από τα επόμενα m_2 μηδενικά από ένα άσσο (1) κ.ό.κ. Προσέξτε ότι στα $m_1+\ldots+m_n$ μηδενικά προσθέτουμε $n-1$ άσσους. Οπότε ο αριθμός των συνδυασμών είναι $\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n-1}{k}$. $\square$