ΤΕΜ231, Χειμερινό εξάμηνο 2012-2013

ΠΡΟΟΔΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ, 10.11.2012 **(1 ώρα 30 λεπτά)**
(Διδάσκων: Δ. Τσαγκαρογιάννης)

ΟΜΑΔΑ Α

Να λύσετε τα παρακάτω θέματα:

Θέμα 1ο:(3 μονάδες)

Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.): μεγιστοποίηση της $z(x) := c^T x$ για $x \in \mathbb{M}_{n\times 1}$, υπό τους περιορισμούς $Ax = b$ και $x \geq 0$, όπου $A \equiv [P_1 \dots P_n] \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $P_j \in \mathbb{M}_{m\times 1}$, για $j = 1, \dots, n$, $b \in \mathbb{M}_{m\times 1}$ και $c \in \mathbb{M}_{n\times 1}$. Υποθέτουμε ότι οι m πρώτες στήλες $P_1, \dots, P_m$ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα οπότε αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{m\times 1}$. Ονομάζουμε $B := \{P_1, \dots, P_m\}$ αυτή τη βάση, οπότε οποιαδήποτε στήλη P_j, $j = 1, \dots, n$, του πίνακα A μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης:

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

για κάποια $x_{ij} \in \mathbb{R}$.

(α) Ορίζουμε μια νέα βάση $B' := \{P_1, \dots, P_{i^*-1}, P_{j^*}, P_{i^*+1}, \dots, P_m\}$ εισάγοντας στη B τη στήλη P_{j^*} για κάποιο $j^* \in \{m+1, \dots, n\}$ στη θέση της βασικής στήλης P_{i^*} για κάποιο $i^* \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $x_{i^*j^*} \neq 0$. Να γραφούν τα διανύσματα P_j του A σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της νέας βάσης B', δηλαδή να βρεθούν οι συντελεστές $x'_{1j}, \dots, x'_{mj}$ της παρακάτω σχέσης:

$$P_j = x'_{1j} P_1 + \dots + x'_{i^*-1\,j} P_{i^*-1\,j} + x'_{j^*} P_{j^*} + x'_{i^*+1\,j} P_{i^*+1\,j} + x'_{mj} P_m. \tag{2}$$

(β) Έστω $0 \leq \mathbf{x_0} \equiv (x_0^1, \dots, x_0^n)$ μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση του παραπάνω π.γ.π., δηλαδή $A\mathbf{x_0} = b$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) να δείξετε ότι για κάθε άλλη τυχαία εφικτή λύση $\mathbf{y_0} \equiv (y_0^1, \dots, y_0^n)^T$ έχουμε:

$$x_0^i = \sum_{j=1}^{n} y_0^j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3}$$

(γ) Έστω $X \equiv [x_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{M}_{m\times n}$ και $z^T \equiv (z_1, \dots, z_n) := (c_1, \dots, c_m)X$, δηλαδή $z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) να δείξετε ότι

$$z(\mathbf{x_0}) = \mathbf{y_0}^T \cdot z \tag{4}$$

και ότι αν $z_j - c_j \geq 0$ για όλα τα $j = 1, \dots, n$ τότε η $\mathbf{x_0}$ είναι άριστη λύση.

Θέμα 2ο:(4 μονάδες) Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού: ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης $-x_1 - 4x_2 - 3x_3$ υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 6 \end{aligned}$$

και $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Να βρείτε τη βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος και την αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Επίσης να ορίσετε το δυϊκό πρόβλημα και να βρείτε τη βέλτιστη λύση του.

Θέμα 3ο:(3 μονάδες) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του a υπάρχει άριστη λύση στο παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και να υπολογιστεί σαν συνάρτηση του a:
μεγιστοποίηση της συνάρτησης $2x_1 + 6x_2 + 3x_3$ υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} -3x_2 + ax_3 &\geq 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

και $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.