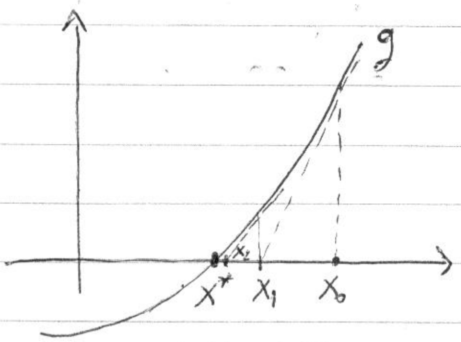
Άρα για $y_1 \neq 0$ ο $L(\underline{x}^*)$ είναι αρνητικά ορισμένος
Συνεπώς, $\underline{x}^*$ τοπικό ακρότατο.

Τετάρτη 5/12/2012.



$g(x^*)=0$

$x_0 \to x_1 \to x_2 \to$ κ.ο.κ. προσεγγίζω το x^*

έχω $f(\underline{x})$ κ' ψάχνω $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο/ελάχιστο.
δηλ. θέλω $\nabla f(\underline{x}^*)=0$
θέτω $g(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x})$
Taylor
Έχω το σύστημα $g(\underline{x})=0$, $g(\underline{x}) = g(\underline{x}^*) + \nabla g(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*)$
Άρα $g(\underline{x}^*) + \nabla g(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \nabla f(\underline{x}^*) + Hf(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*) = 0$
$Hf(\underline{x}^*)$ αρνητικά ορισμένος
$\Rightarrow \underline{x} = \underline{x}^* - Hf(\underline{x}^*)^{-1}\nabla f(\underline{x}^*)$

<u>Ενεργοί περιορισμοί</u>
Ανισοτικοί περιορισμοί $g_i(\underline{x}) \le 0$ αν $\underline{x}^* \in F$ τω. $g_i(\underline{x}^*)=0$

$h_i(\underline{x})=0$ περιορισμοί είναι ενεργοί

$$\begin{cases} \max f(\underline{x}) \\ h_1(\underline{x})=0, \dots, h_m(\underline{x})=0 \\ g_1(\underline{x}) \le 0, \dots, g_p(\underline{x}) \le 0 \end{cases}$$

F εφικτή περιοχή, την εξετάζω στα $h_i(\underline{x})$ κ' $g_i(\underline{x})$

Ικανή συνθήκη τοπικού μεγίστου

f, h, g C^2, $m \le n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

F ενεργοί περιορισμοί.

Αν $\exists\ \underline{x}^* \in F$, $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ τ.ω.

I) $\mu \ge 0$ $\nabla f(\underline{x}^*) - \lambda^T \nabla h(\underline{x}^*) - \mu^T \nabla g(\underline{x}^*) = 0$, $\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0, \forall i = 1,..,p$

II) $L(\underline{x}^*) = H f(\underline{x}^*) - H(\lambda^T h)(\underline{x}^*) - H(\mu^T g)(\underline{x}^*)$, $L(\underline{x}^*)$ αρνητικά ορισμένος.

$$M_{\underline{x}^*}^F = \{ y : \nabla h(\underline{x}^*) y = 0, \nabla g_i(\underline{x}^*) = 0, i \in j, j = \{ i : g_i(\underline{x}^*) = 0 \} \}$$

Πρόβλημα Κυρτού Προγραμματισμού (Π.Κ.Π.)

$$(1) \begin{cases} \max f(\underline{x}) \\ g_i(\underline{x}) \le 0, \quad i = 1,..,p \end{cases}$$

f κοίλη, F κυρτό σύνολο $\Leftrightarrow$ $g_i(x) \le 0$ κυρτές συναρτήσεις $\forall i = 1,..,p$.

Πόρισμα 1

Έχω το Π.Κ.Π. (1) με εφικτή περιοχή F

Αν $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ τ.ω. $\mu_i \ge 0$ $\forall i = 1,..,p$, $\dfrac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \dfrac{\partial g_i(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0$, $j = 1,..,n$, $\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0$, $i = 1,..,p$, $g_i(\underline{x}^*) \le 0$, $i = 1,..,p$. Τότε $\underline{x}^* \in F$ ολικό μέγιστο.

π.χ.

$$\begin{cases} \max (-x_1^2 - x_2^2) \\ g_1(x) = x_1 - x_2 + 2 \le 0 \end{cases}$$

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, C^2, f κοίλη, F κυρτό σύνολο

$$H f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow -H f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$D_1 = |2| > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

$-Hf(\underline{x})$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow Hf(\underline{x})$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow f$ κοίλη

$$Hg_1 = \begin{pmatrix} g_{x_1x_1} & g_{x_1x_2} \\ g_{x_2x_1} & g_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g^T \cdot Hg_1(x) \cdot g = 0 \Rightarrow Hg_1 \text{ θετικά ημιορ.}$$

g κυρτή συνάρτηση $\Rightarrow F$ κυρτό σύνολο.

Άρα $\underline{x}^* \in F$ ολικό μέγιστο.

Από πόρισμα 1 : $p=1$, $\mu_1 \geq 0$ (1)

$$j=1,2, \quad \frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial g_1(\underline{x}^*)}{\partial x_1} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}^*)}{\partial x_2} - \mu_1 \frac{\partial g_1(\underline{x}^*)}{\partial x_2} = 0 \quad (3)$$

$$\mu_1 g_1(\underline{x}^*) = 0, \quad g_1(\underline{x}^*) \leq 0 \quad (4)$$

Συνθήκες KKT: $\mu_1 \geq 0$ (1)

$$-2x_1^* - \mu_1 = 0 \quad (2)$$

$$-2x_2^* + \mu_1 = 0 \quad (3)$$

$$\mu_1(x_1^* - x_2^* + 2) = 0 \quad (4)$$

$$x_1^* - x_2^* + 2 \leq 0 \quad (5)$$

Το πρόβλημα λύνεται με υπόθεση.

(1) $\Rightarrow$ Έστω $\mu_1 = 0$, Τότε (2) $\Rightarrow x_1^* = 0$, (3) $\Rightarrow x_2^* = 0$

(4) ✓ , (5) $\Rightarrow 2 \leq 0$ άτοπ.

(1) $\Rightarrow$ Έστω $\mu_1 \neq 0$, δηλ. $\mu_1 > 0$.

Τότε (2) $\Rightarrow x_1^* = -\frac{\mu_1}{2}$, (3) $\Rightarrow x_2^* = \frac{\mu_1}{2}$, (4) $\Rightarrow \mu_1 = 2$ ($\rightsquigarrow x_1^* = -1, x_2^* = 1$)

(5) $\Rightarrow 0 \leq 0$ ✓

Συνεπώς $x^* = (-1, 1)$, $\max f(x^*) = -2$.