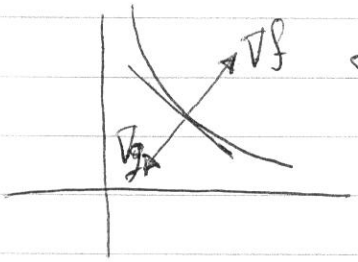
Μέθοδος Newton-Raphson

(βλ. π.χ. σελ. 224-5 του βιβλίου)

Δευτέρα 3/12/2012

Πρόβλημα με εξισωτικούς περιορισμούς



πρέπει $\nabla g \perp$ εφαπτόμενο επίπεδο (για να το ορίσω)
αν $\nabla f \perp$ εφαπτόμενο επίπεδο τότε $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο
οπότε $\nabla g \parallel \nabla f$

Θεώρημα 1

$\underline{x}^*$ κανονικό σημείο, $M^h_{\underline{x}^*} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \nabla h(\underline{x}^*) \cdot \underline{y} = 0\} \; (= M^F_{\underline{x}^*})$

Θεώρημα 2

$\underline{x}^*$ τοπικό ακρότατο της f στο F κ' κανονικό σημείο, τότε από $h(\underline{x}) = 0$ έχουμε: $\nabla f(\underline{x}^*) y = 0, \; \forall y \in M^F_{\underline{x}^*}$, f, h C^1.

Θεώρημα 3 (Αναγκαία συνθήκη)

h, f C^2, $\underline{x}^*$ κανονικό σημείο κ' τοπικό ακρότατο της f στο F,
τότε: (I) $\nabla f(\underline{x}^*) + \lambda^T \nabla h(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \nabla l(x^*, \lambda^*) = 0$.

(II) $L(x^*) = Hf(\underline{x}^*) - H(\lambda^T h)(\underline{x}^*)$ αρνητικά ημιορισμένος στο $M^F_{\underline{x}^*}$
(δηλ. $y^T L(\underline{x}^*) y \leq 0, \; \forall y \in M^F_{\underline{x}^*}$)

(Ικανή συνθήκη)

$L(\underline{x}^*)$ αρνητικά ορισμένος στο $M^F_{\underline{x}^*}$
(δηλ. $y^T L(\underline{x}^*) y < 0, \; \forall y \in M^F_{\underline{x}^*}$)

Π.χ.

$$f(x,y,z) = -x-y-z \quad \rightarrow \underset{\sim}{n=3}$$

$$(x^2+y-3)^2 + (x+3y+2z-f)^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} h_1(\underline{x}) &= x^2+y-3=0 \\ h_2(\underline{x}) &= x+3y+2z-f=0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{m=2}$$

$$\ell(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = -x-y-z-\lambda_1(x^2+y-3)-\lambda_2(x+3y+2z-f)$$

$$\nabla \ell(\underline{x},\underline{\lambda}) = (\nabla \ell_x \quad \nabla \ell_y \quad \nabla \ell_z \quad \nabla \ell_{\lambda_1} \quad \nabla \ell_{\lambda_2})$$

$$\nabla \ell(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = 0.$$

$$\nabla \ell(\underline{x},\underline{\lambda}) = \left.\begin{pmatrix} -1-2\lambda_1 x-\lambda_2 \\ -1-\lambda_1-3\lambda_2 \\ -1-2\lambda_2 \\ -x^2-y+3 \\ -x-3y-2z+f \end{pmatrix}\right\} m+n=5.$$

$$\nabla \ell(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{11}{4},\ z=-\frac{3}{8}$$

$$(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = (x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

υποψήφιο τοπικό ακρότατο.

$$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \ell_{xx} & \ell_{xy} & \ell_{xz} \\ \ell_{yx} & \ell_{yy} & \ell_{yz} \\ \ell_{zx} & \ell_{zy} & \ell_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow L(\underline{x}^*) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^h_{\underline{x}^*} = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^3 : \nabla h(\underline{x}^*) \cdot \underline{y}^T = 0 \}$$

$$\nabla h(\underline{x}) \cdot \underline{y}^T = \nabla h(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\nabla h_1(\underline{x}^*) = (2x^*, 1, 0) = (-1, 1, 0)$
$\nabla h_2(\underline{x}^*) = (1, 3, 2)$

$$\begin{pmatrix} \nabla h_1(\underline{x}^*) \\ \nabla h_2(\underline{x}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (-1, 1, 0) \\ (1, 3, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 \\ 2y_3 + 4y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_3 = -2y_1 \end{cases}$$

$$M^h_{\underline{x}^*} = \{ y \in \mathbb{R}^3 : \nabla h(\underline{y}) = 0 \}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ -2y_1 \end{pmatrix}$$

θέλω $\underline{y}^T L(\underline{x}^*) \underline{y} < 0$.

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1 \ y_1 \ -2y_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ -2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (-y_1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ -2y_1 \end{pmatrix} = -y_1^2 < 0, \quad y_1 \neq 0$$

$\Rightarrow L(\underline{x}^*)$ αρνητικά ορισμένος

κ' αφού $\underline{x}^*$ τοπικό ακρότατο της f στο F, τότε $\underline{x}^*$ ολικό ακρότατο, διότι το F είναι φραγμένο κ' $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$ μοναδική λύση του συστήματος.

π.χ.

$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - 2x_3 + 5$
$h_1(\underline{x}) = x_1^2 + x_2 - 1 = 0$.
$h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$.

$l(\underline{x}, \underline{\lambda}) = -x_1 - x_2 - 2x_3 + 5 - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 1) - \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$

$$\nabla l(\underline{x},\underline{\lambda}) = \left(\nabla l_{x_1}\ \nabla l_{x_2}\ \nabla l_{x_3}\ \nabla l_{\lambda_1}\ \nabla l_{\lambda_2}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1-2\lambda_1 x_1-\lambda_2 \\ -1-\lambda_1-\lambda_2 \\ -2-\lambda_2 \\ -x_1^2-x_2+1 \\ -x_1-x_2-x_3+1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla l(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = 0 \Rightarrow (\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, -2\right)$$

$$L(\underline{x},\underline{\lambda}) = \begin{pmatrix} l_{x_1x_1} & l_{x_1x_2} & l_{x_1x_3} \\ l_{x_2x_1} & l_{x_2x_2} & l_{x_2x_3} \\ l_{x_3x_1} & l_{x_3x_2} & l_{x_3x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εφαπτομενικό επίπεδο: $M^h_{x^*} = \{(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3 : \nabla h(\underline{x}^*)\cdot\underline{y} = 0\}$

$$\nabla h_1(\underline{x}^*) = (2x_1^*, 1, 0) = (1,1,0)$$
$$\nabla h_2(\underline{x}^*) = (1,1,1)$$

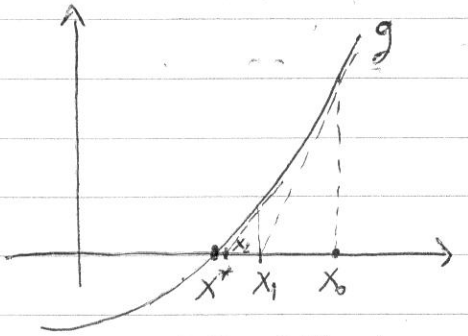
$$\begin{pmatrix} \nabla h_1(\underline{x}^*) \\ \nabla h_2(\underline{x}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=0 \\ y_1+y_2+y_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-y_2 \\ y_3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y} = (y_1, -y_1, 0)$$

$$\underline{y}^T L(\underline{x}^*)\cdot\underline{y} = (y_1, -y_1, 0)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2y_1, 0, 0)\begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2y_1^2 < 0$$

Άρα για $y_i \neq 0$ ο $L(\underline{x}^*)$ είναι αρνητικά ορισμένος
Συνεπώς, $\underline{x}^*$ τοπικό ακρότατο.

Τετάρτη 5/12/2012.



$g(x^*)=0$

$x_0 \to x_1 \to x_2 \to$ κ.ο.κ. προσεγγίζω το x^*

Έχω $f(\underline{x})$ κ' ψάχνω $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο/ελάχιστο.
Δηλ. θέλω $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$
Θέτω $g(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x})$
Έχω το σύστημα $g(\underline{x}) = 0$, $g(\underline{x}) = g(\underline{x}^*) + \nabla g(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*)$ ← Taylor
Άρα $g(\underline{x}^*) + \nabla g(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \nabla f(\underline{x}^*) + Hf(\underline{x}^*)(\underline{x}-\underline{x}^*) = 0$
$Hf(\underline{x}^*)$ αρνητικά ορισμένος
$\Rightarrow \underline{x} = \underline{x}^* - Hf(\underline{x}^*)^{-1} \nabla f(\underline{x}^*)$

<u>Ενεργοί περιορισμοί</u>
Ανισοτικοί περιορισμοί $g_i(\underline{x}) \le 0$ αν $\underline{x}^* \in F$ τω. $g_i(\underline{x}^*) = 0$

$h_i(\underline{x}) = 0$ περιορισμοί είναι ενεργοί

$$\begin{cases} \max f(\underline{x}) \\ h_1(\underline{x}) = 0, \dots, h_m(\underline{x}) = 0 \\ g_1(\underline{x}) \le 0, \dots, g_p(\underline{x}) \le 0 \end{cases}$$

F εφικτή περιοχή, την εξετάζω στα $h_i(\underline{x})$ κ' $g_i(\underline{x})$