Αλλά, $g(\underline{x}(\underline{c})) = \underline{c} \Rightarrow \nabla g(\underline{x}(\underline{c})) \cdot \nabla_{\underline{c}}\, \underline{x}(\underline{c}) = I$.

κ' $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$, οπότε η (*) δίνει: $(*) = \lambda \underbrace{\nabla g \cdot \nabla_{\underline{c}}\, \underline{x}(\underline{c})}_{I \text{ από τη } (2)}$

Συνθήκες Karush Kuhn Tucker (KKT)

Παρασκευή 30/11/2012

Συνθήκη τοπικού μεγίστου

i) $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$

ii) $H f(\underline{x}^*)$ αρνητικά ημιορισμένος.

$$H f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Συνθήκη ολικού μεγίστου

f κοίλη $\Leftrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $\forall x, y \in F$, $0 < \lambda < 1$.

F κυρτό σύνολο $\forall \underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο.

Άριστη λύση Π.Μ.Γ.Μ. $\underline{x}^*$

Το $\underline{x}^*$ ικανοποιεί τη συνθήκη τοπικού μεγίστου κ' f κοίλη κ' F κυρτό σύνολο

(Θεωρ. 8 σελ 217)

Η f C^2 συνάρτηση είναι $\overset{\text{κυρτή}}{\text{κοίλη}}$ ανν $H f(\underline{x})$ είναι $\overset{\text{θετικά}}{\text{αρνητικά}}$ ημιορισμένος, $\forall \underline{x}$.

$F = \mathbb{R}^n$ κυρτό σύνολο.

$F = \{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(\underline{x}) \leq 0 \}$ κυρτό σύνολο, αν $g_i(\underline{x})$ κυρτές συναρτήσεις.

Α (πίνακας) θετικά ορισμένος ανν είναι τετραγωνικός, συμμετρικός κ' πραγματικός.

i) Αν ο Α έχει θετικές ιδιοτιμές, τότε είναι θετικά ορισμένος

ii) Παίρνω τους άνω τετραγωνικούς υποπίνακες: Αν έχουν θετική ορίζουσα τότε ο Α είναι θετικά ορισμένος.

iii) Οδηγοί Gauss

π.χ.

$$Hf(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 12 & -26 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow -Hf(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 8 & -12 & 0 \\ -12 & 26 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = |8| > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 26 \end{vmatrix} > 0$$

$$D_3 = 8\begin{vmatrix} 26 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} -12 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

π.χ.

$$\begin{cases} \max \left(x_1 + 2x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Τοπικό μέγιστο:

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \left(1-2x_1 \quad 2+x_3-2x_2 \quad x_2-2x_3\right)$$

$$\nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x_1 = 0 \\ 2+x_3-2x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_1 = |2| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$D_3 = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(3) = 6 > 0.$$

$\Rightarrow -Hf$ θετικά ημιορισμένος $\Rightarrow Hf$ αρνητικά ημιορισμένος, $\forall x$.

Επίσης, f κοίλη, αφού $Hf(\underline{x})$ αρνητικά ημιορισμένος $\forall x$ κ' f C^2.
κ' $F=\mathbb{R}^3$ κυρτό.

Άρα $\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο.

<u>π.χ.</u>

$$\begin{cases} \min\left(4x_1^2+13x_2^2+x_3^2-12x_1x_2-2x_2x_3-4x_1+14\right) \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$-\max\left(-4x_1^2-13x_2^2-x_3^2+12x_1x_2+2x_2x_3+4x_1-14\right)$$

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(-8x_1+12x_2+4 \quad -26x_2+12x_1+2x_3 \quad -2x_3+2x_2\right)$$

$$\underline{x}^* : \nabla f(\underline{x}^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1+12x_2+4=0 \\ -26x_2+12x_1+2x_3=0 \\ -2x_3+2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x}^* = (2,1,1).$$

$$Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 12 & -26 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ -12 & 26 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = |8| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 26 \end{vmatrix} = 64 > 0.$$
$$D_3 = 8\begin{vmatrix} 26 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} -12 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 96 > 0.$$

$\Rightarrow -Hf(\underline{x})$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow -Hf(\underline{x})$ θετικά ημιορισμένος
$\Rightarrow Hf(\underline{x})$ αρνητικά ημιορισμένος.

f κοίλη, $F=\mathbb{R}^3$ κυρτό σύνολο.

Άρα $\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο, δηλ. $\underline{x}^*$ άριστη λύση του Π.Μ.Γ.Π.