Δυϊκό : $\begin{cases} \min \lambda^T \cdot 0 \\ \underline{\lambda}^T \nabla \underline{g}(\underline{x}^*) = \nabla f(\underline{x}^*) \end{cases}$

Οπότε $\nabla f(\underline{x}^*) = \lambda^T \nabla \underline{g}(\underline{x}^*)$.

Τετάρτη 28/11/2012

<u>Θεώρημα 1</u> $\boxed{f \in C^2(\mathbb{R}^n)}$

Έστω $\underline{x}^*$ ένα τοπικό ακρότατο της f υπό τους περιορισμούς $g(\underline{x})=0$. Υποθέτοντας ότι το $\underline{x}^*$ είναι κανονικό σημείο των περιορισμών, τότε $\exists$ $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\nabla f(\underline{x}^*) + \underline{\lambda}^T \nabla \underline{g}(\underline{x}^*) = 0$.

<u>Θεώρημα 2</u>

Αν το $\underline{x}^*$ είναι τοπικό ελάχιστο, τότε $L(\underline{x}^*) = Hf(\underline{x}^*) - \underline{\lambda}^T H \underline{g}(\underline{x}^*)$ είναι θετικά ημιορισμένη στο $\{\underline{y} : \nabla \underline{g}(\underline{x}^*) \cdot \underline{y} = 0\} = M^g_{\underline{x}^*}$

<u>Σημείωση</u>

Για $\underline{g} = (g_1, \dots, g_m)$ έχουμε $\nabla \underline{g} = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$

κ' για κάθε ∇g_i, $i = 1, \dots, m$ μπορούμε να βρούμε την Hessian.

Η πραγματική συνάρτηση $\underline{\lambda}^T \underline{g}$ έχει gradient $\underline{\lambda}^T \nabla \underline{g}$ κ' Hessian $\lambda^T H g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H g_i$.

<u>Απόδειξη 2</u>

Το $\underline{x}^*$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, οπότε για την παραμετρικοποίηση $\{t \longrightarrow z(t)\}$, με $\underline{z}(t^*) = \underline{x}^*$, έχουμε $\frac{d^2}{dt^2} f(z(t))\Big|_{t=t^*} \geq 0$.

Έχουμε : $\frac{d}{dt} f(\underline{z}(t)) = \nabla f(\underline{z}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t)$

$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{d^2}{dt^2} f(\underline{z}(t)) = \dot{\underline{z}}(t)^T H f(\underline{z}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) + \nabla f(\underline{z}(t)) \cdot \ddot{\underline{z}}(t)$ (1)

Επίσης $\lambda^T g(\underline{z}(t)) = 0 \Rightarrow \lambda^T \nabla g(\underline{z}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) = 0$.

$\Rightarrow \lambda^T \dot{\underline{z}}(t)^T Hg(\underline{z}(t)) \cdot \dot{\underline{z}}(t) + \lambda^T \nabla g(\underline{z}(t)) \cdot \ddot{\underline{z}}(t) = 0 \quad (2)$

Από (1), (2) έχουμε: $\boxed{(1)-(2)}$

$$0 \leq \dot{\underline{z}}(t)^T \left(Hf(\underline{z}(t)) - \lambda^T Hg(\underline{z}(t))\right) \dot{\underline{z}}(t) + \underbrace{\left(\nabla f(z(t)) - \lambda^T \nabla g(z(t))\right)}_{=0 \text{ από θεωρ 1.}} \ddot{\underline{z}}(t) \Big|_{t=t^*}$$

Επομένως $\dot{\underline{z}}(t)^T \underbrace{\left(Hf(\underline{z}(t)) - \lambda^T Hg(\underline{z}(t))\right)}_{= L(\underline{x}^*)} \dot{\underline{z}}(t) \Big|_{t=t^*} \geq 0$.

δηλ $L(\underline{x}^*)$ θετικά ημιορισμένος

Έχουμε κ' ικανές συνθήκες

Έστω $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, S η επιφάνεια που ορίζεται από το $g=0$.

Αν (i) $\nabla f(\underline{x}^*) - \lambda^T \nabla g(\underline{x}^*) = 0$

(ii) ο πίνακας $L(\underline{x}^*)$ είναι θετικά ορισμένος

Τότε το $\underline{x}^*$ είναι τοπικό ελάχιστο της f υπό τους περιορισμούς $g=0$.

Ευαισθησία

Έστω $f, g \in C^2$ κ' έστω η οικογένεια προβλημάτων

$$(1) \begin{cases} \min f(\underline{x}) \\ \underline{g}(\underline{x}) = \underline{c} \end{cases}$$

"οικογένεια" ως προς $\underline{c}$ $\quad \underline{g} = (g_1, \dots, g_m)$

Έστω ότι για $\underline{c} = \underline{0}$ υπάρχει τοπικό ελάχιστο $\underline{x}^*$.

Τότε, $\forall\ \underline{c} \in \mathbb{R}^m$ σε μια περιοχή του $\underline{0}$, $\exists\ \underline{x}(\underline{c})$ συνεχώς εξαρτώμενο από το $\underline{c}$ τω. $\underline{x}(\underline{0}) = \underline{x}^*$ κ' τω. $\underline{x}(\underline{c})$ είναι ελάχιστο (λύση) του (1).

Επιπλέον, $\nabla_{\underline{c}} f(\underline{x}(\underline{c})) = -\underline{\lambda}^T$

Απόδειξη

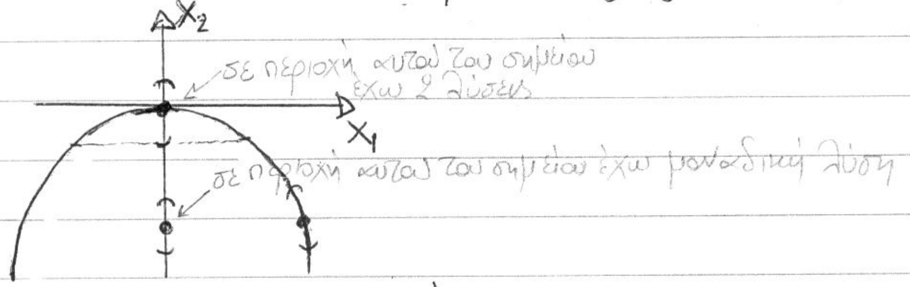
Έστω το σύστημα $\begin{cases} \nabla f(\underline{x}) + \lambda^T \nabla g(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{g}(\underline{x}) = \underline{0} \end{cases}$

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης (Implicit function theorem)

Έστω $h(\underline{y})=0$, $h \in C^p$, $p \geq 1$.

π.χ.

$h(x_1,x_2)=x_1^2+x_2=0$. Πότε μπορούμε να γράψουμε $x_1=\varphi(x_2)$;



κ'

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$ μη ιδιάζουσα

Τότε $\exists$ περιοχή του $\hat{y}=(y_{m+1},\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ κ' $\varphi_i(\hat{y})$, $i=1,\dots,m$ τω.

(i) $\varphi \in C^p$

(ii) $y_i=\varphi_i(\hat{y})$

(iii) $h_i(\varphi_1(\hat{y}),\dots,\varphi_m(\hat{y}),\hat{y})=0$.

Από υπόθεση, $\exists$ λύση $(\underline{x}^*,\underline{\lambda})$, για $\underline{c}=\underline{0}$

Η Jacobian σ'αυτή τη λύση είναι:
$$\begin{pmatrix} L(\underline{x}^*) & \nabla g(\underline{x}^*)^T \\ \nabla g(\underline{x}^*) & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας είναι μη ιδιάζων, διότι από υπόθεση το $\underline{x}^*$ είναι κανονικό σημείο κ' ο $L(\underline{x}^*)$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης κ' συμπεραίνουμε την ύπαρξη της νέας λύσης $\underline{x}(\underline{c})$

$$\nabla_{\underline{c}} f(\underline{x}(\underline{c}))\Big|_{\underline{c}=\underline{0}} = \nabla_{\underline{x}} f(\underline{x}^*) \cdot \nabla_{\underline{c}} \underline{x}(\underline{c}) \qquad (*)$$

Αλλά, $g(\underline{x}(\underline{c})) = \underline{c} \Rightarrow \nabla g(\underline{x}(\underline{c})) \cdot \nabla_{\underline{c}}\, \underline{x}(\underline{c}) = I$

κ' $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$, οπότε η (*) είναι: $(*) = \lambda \underbrace{\nabla g \cdot \nabla_{\underline{c}}\, \underline{x}(\underline{c})}_{I \text{ από τη } (2)}$

<u>Συνθήκες Karush Kuhn Tucker</u> (KKT)