Άρα $\underline{x}^*$ τοπικό ελάχιστο.

Παρασκευή 14/12/2012

Άσκηση

Έστω το π.γ.π.

$$(\Pi)\begin{cases} \max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i \ , i=1,..,m \qquad (A\underline{x} \le \underline{b}) \\ x_j \ge 0 \ , j=1,..,n \end{cases}$$

Να δείξετε ότι τα $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mu}^* \in \mathbb{R}^m$ ικανοποιούν τις συνθήκες KKT ανν το $\underline{x}^*$ είναι άριστη λύση του (Π) κ' το $\underline{\mu}^*$ είναι άριστη λύση του δυϊκού.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες KKT

Έστω $f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, $g_i(\underline{x}) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - b_i \le 0$, $i=1,..,m$

κ' $x_j \ge 0$, $j=1,..,n$.

Τότε, ← εδώ + για πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\nabla f(\underline{x}) - \underline{\mu}^T \nabla g(\underline{x}) = 0 \ , \mu_i \ge 0 \ , i=1,..,m \qquad (1)$$

$$\mu_i g_i(\underline{x}) = 0 \ , i=1,..,m \ , \underline{x} \ge 0 \qquad (2)$$

Ισοδύναμα έχουμε:

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \alpha_{ij} = 0 \ , j=1,..,n.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{δηλ. } \underline{c}^T - \underline{\mu}^T A = 0 \\ \\ \text{κ' } \underline{\mu} \ge 0 \end{array}\right\} \text{Άρα το } \underline{\mu} \text{ είναι εφικτή λύση του δυϊκού.}$$

$\underline{\mu}^T (A\underline{x} - \underline{b}) = 0$ (προσθέτοντας τις (1), (2) για $i=1,..,m$). (3)

Επίσης από το αρχικό πρόβλημα έχουμε :

$$A\underline{x} \le \underline{b} \quad , \underline{x} \ge 0$$

Άρα $\underline{x}$ εφικτή λύση του αρχικού.

Επίσης, για $\underline{x}^*$, $\underline{\mu}^*$ εφικτές λύσεις των (Π) κ' (Δ) αντίστοιχα, που ικανοποιούν τις συνθήκες KKT, έχουμε :

$$\underline{c}^T \cdot \underline{x}^* = \underline{\mu}^T A \underline{x}^* \overset{(3)}{=\!=} \underline{\mu}^* \underline{b}$$

Άρα οι $\underline{x}^*$ κ' $\underline{\mu}^*$ είναι βέλτιστες λύσεις των (Π) κ' (Δ) αντίστοιχα.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι $\underline{x}^*, \underline{\mu}^*$ είναι άριστες λύσεις των (Π) κ' (Δ) αντίστοιχα

Τότε $\underline{\mu} \ge 0 \quad , \underline{\mu}^T A \ge c$

κ' $\underline{x} \ge 0 \quad A\underline{x} \le b$

$$\underline{c}^T \underline{x} = \underline{\mu}^T \underline{b} \qquad (4)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\underline{\mu}^T (A\underline{x} - \underline{b}) = 0$

<u>Υπενθύμιση</u> $\underline{x}^* (\underline{\mu}^{*T} A - \underline{c}^T) = 0$ επειδή $\underline{x}^*$ κ' $\underline{\mu}^*$ άριστες λύσεις

Ισχύει από (4)

αφού $\underline{\mu}^T (A\underline{x} - \underline{b}) = 0 \Leftrightarrow \underline{\mu}^{*T} A \underline{x}^* = \underline{c}^T \cdot \underline{x}^*$

<u>Άσκηση</u>

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) \quad , f(x_1, x_2) = \ln(1 + x_1) + x_1 - x_2 \\ g_1(x_1, x_2) = x_1 - 1 \le 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 , x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Εξετάζουμε αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

$f_{x_1} = \frac{1}{1+x_1} + 1$, $f_{x_2} = -1$, $f_{x_1x_1} = -\frac{1}{(1+x_1)^2}$, $f_{x_1x_2} = f_{x_2x_1} = f_{x_2x_2} = 0$.

Οπότε $Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+x_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αρνητικά ημιορισμένος.

$D_1 = det\left(-\frac{1}{(1+x_1)^2}\right) = -\frac{1}{(1+x_1)^2}$

$D_2 = det(Hf(\underline{x})) = 0$, $\forall \underline{x}$

Άρα f κοίλη, οπότε γάχνω το ολικό μέγιστο.

$\nabla f - \mu_1^T \nabla g_1 - \mu_2^T \nabla g_2 - \mu_3^T \nabla g_3 - \mu_4^T \nabla g_4 = 0.$

όπου $g_3(\underline{x}) = -x_1$ κ' $g_4(\underline{x}) = -x_2$.

Οπότε,

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x_1} + 1 - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = 0. & (1) \\ -1 - \mu_2 + \mu_4 = 0. & (2) \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$\mu_1(x_1 - 1) = 0$ (4)

$\mu_2(x_1 + x_2 - 2) = 0$ (5)

$\mu_3(-x_1) = 0$ (6)

$\mu_4(-x_2) = 0$ (7)

Περίπτωση 1

$g_1 < 0$, $g_2 < 0$

Άρα $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$. από (4) κ' (5)

κ' τότε (1) $\Rightarrow \frac{1}{1+x_1} + 1 + \mu_3 = 0$ αδύνατο, αφού $\mu_3 > 0$ κ' $x_1 > 0$

(2) $\Rightarrow \mu_4 = 1 \xrightarrow{(7)} x_2 = 0$.

Περίπτωση 2

$g_1 = 0$, $g_2 < 0$

Από (4): $x_1 = 1$, από (5): $\mu_2 = 0$.

από (6) : $\mu_3 = 0$.

(1) $\Rightarrow \frac{1}{2} + 1 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{3}{2}$

(2) $\Rightarrow \mu_4 = 1 \xRightarrow{(7)} x_2 = 0$

κ' ελέγχουμε αν ικανοποιούνται όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις.

Δευτέρα 17/12/2012

Δυναμικός προγραμματισμός

π.χ. 1

Έστω μια ακολουθία n πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Θέλουμε να βρούμε την υπακολουθία $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j$ διαδοχικών αριθμών με το μέγιστο άθροισμα

$(i < j \;,\; i, j \in \{1, \ldots, n\} \;,\; \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$

$M(j)$:= μέγιστο άθροισμα όλων των δυνατών υπακολουθιών που τελειώνουν στο j.

Οπότε, $M(j) = \max\{M(j-1) + \alpha_j \,,\, \alpha_j\}$.

$\left(\ldots\ldots, \underbrace{\alpha_{j-1}, \alpha_j}, \ldots \right.$
συνεχίζουμε το βέλτιστο προηγούμενο παράθυρο (υπακολουθία)
ή ξεκινάμε ένα καινούριο.)

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $M(n)$.

Υπολογιστικό κόστος $O(n)$.
(έχουμε να λύσουμε n προβλήματα $(j = 1, \ldots, n)$ που το καθένα θέλει χρόνο 1.)