Τετάρτη 12/12/2012

Θεώρημα

Έστω $\underline{x}^*$ τοπικό ακρότατο του
$$(1)\begin{cases} \min f(\underline{x}) \\ h_1(\underline{x})=0, \dots, h_m(\underline{x})=0 \\ g_1(\underline{x}) \le 0, \dots, g_p(\underline{x}) \le 0 \end{cases}$$

κ' έστω ότι είναι κανονικό σημείο των περιορισμών.

Τότε υπάρχει $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ κ' $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ με $\underline{\mu} \ge 0$ τ.ω. $\nabla f(\underline{x}^*) + \underline{\lambda}^T h(\underline{x}^*) + \underline{\mu}^T \nabla g(\underline{x}^*) = 0$ (2)

$\underline{\mu}^T g(\underline{x}^*) = 0$ (3)

Παρατήρηση

3. Για ικανές συνθήκες τοπικού ελαχίστου θέλουμε:

i) τις συνθήκες (2) κ' (3) με $\underline{\mu} \ge 0$

ii) ο πίνακας $L(\underline{x}^*) = Hf(\underline{x}^*) + \underline{\lambda}^T H h(\underline{x}^*) + \underline{\mu}^T H g(\underline{x}^*)$ είναι θετικά ορισμένος στον υπόχωρο $M' = \{\underline{y} : \nabla h(\underline{x}^*) \cdot \underline{y} = 0, \nabla g_j(\underline{x}^*) \cdot \underline{y} = 0, \forall j \in J'\}$ όπου $J' = \{j : g_j(\underline{x}^*) = 0, \mu_j > 0\}$

Εφαρμογές

1. Πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (μόνο ανισωτικούς περιορισμούς κ' f κυρτή/κοίλη) : ολικό ελάχιστο/μέγιστο.

2. Στον αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού.

Π.χ.

$\min -\ln(1+x_1+x_2)$ ← κυρτή συνάρτηση – κυρτός προγραμματισμός

$x_1 + 2x_2 \le 5$

$x_1, x_2 \ge 0$

$f(x_1,x_2) = -\ln(1+x_1+x_2)$, $f_{x_1} = -\frac{1}{1+x_1+x_2}$, $f_{x_2} = -\frac{1}{1+x_1+x_2}$

$f_{x_1x_1} = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}$, $f_{x_2x_2} = f_{x_2x_1} = f_{x_1x_1}$

$Hf(\underline{x}) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

έχουμε τις υποορίζουσες: $D_1 = |1| = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0$.
άρα θετικά ημιορισμένος
(αν $D_2 > 0$ τότε θα ήταν θετικά ορισμένος)

Επίσης $g(x_1,x_2) = x_1 - 2x_2 - 5$ (γραμμική)
$Hg(\underline{x}) = 0$

(Έχω μια κυρτή συνάρτηση να ελαχιστοποιήσω σε ένα κυρτό περιορισμό
→ το σύνολο είναι κυρτό
Άρα έχω ολικό ελάχιστο.)

Οπότε το εφικτό σύνολο είναι κυρτό κ' η f κυρτή
Άρα κάθε τοπικό ελάχιστο είναι κ' ολικό.

Έχουμε $\nabla f + \mu_1\nabla g_1 + \mu_2\nabla g_2 + \mu_3\nabla g_3 = 0$

$g_1 = x_1 + 2x_2 - 5$
$g_2 = -x_1$ ≤ 0 , όπως $x_1, x_2 \geq 0$.
$g_3 = -x_2$

$\left(-\frac{1}{1+x_1+x_2}, -\frac{1}{1+x_1+x_2}\right) + \mu_1(1,2) + \mu_2(-1,0) + \mu_3(0,-1) = 0$.

$-\frac{1}{1+x_1+x_2} + \mu_1 - \mu_2 = 0$ (1)
$-\frac{1}{1+x_1+x_2} + 2\mu_1 - \mu_3 = 0$ (2)
$\mu_1(x_1 + 2x_2 - 5) = 0$ (3)
$\mu_2(-x_1) = 0$ (4)
$\mu_3(-x_2) = 0$ (5)
$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$

• Υποθέτουμε ότι
$x_1 + 2x_2 = 5$ (ενεργός περιορισμός)
ενώ
$-x_1, -x_2 < 0$ (μη ενεργείς)

έχουμε: επειδή $-x_1, -x_2 < 0$, από (4),(5) έχουμε ότι $\mu_2 = \mu_3 = 0$.
Οπότε από (1),(2) έχουμε: $-\frac{1}{1+x_1+x_2} + \mu_1 = -\frac{1}{1+x_1+x_2} + 2\mu_1 = 0$
που είναι αδύνατο.

- Αν πάρουμε $x_2 = 0$ κ' $-x_1 < 0$ (δηλαδή $\mu_2 = 0$, από (4))
έχουμε ότι $\mu_1 = \frac{1}{1+x_1+x_2}$ από την (1)
από τη (2): $-\frac{1}{1+x_1+x_2} + 2\mu_1 - \mu_3 = 0$
$\Rightarrow \mu_3 = \frac{1}{1+x_1+x_2} \overset{x_2=0}{=} \frac{1}{1+x_1}$
κ' αφού $\mu_1 > 0$, από τη (3) έχουμε $x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \overset{x_2=0}{\Longleftrightarrow} x_1 = 5$
Άρα η $(5,0)$ είναι ολικό ελάχιστο.

<u>π.χ.</u> (πολλ/στές Lagrance)

$$\begin{cases} \max(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\ x_1+x_2+x_3 = 3 \end{cases}$$

Αν έχω εξισωτικούς περιορισμούς παίρνω Lagr.
Αν έχω ανισοτικούς περιορισμούς παίρνω KKT

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix}, \quad \nabla g = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g \\ \partial_{x_2} g \\ \partial_{x_3} g \end{pmatrix}$$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
$g(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3-3$

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ \lambda = -2 \end{array}$$

$$L(\underline{x}) = Hf + \lambda Hg = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να δούμε αν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη στον υπόχωρο.
$\{\underline{y} : \underline{y} \cdot \nabla g(\underline{x}^*) = 0\} = \{y : (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0\} = \{y : y_1+y_2+y_3 = 0\}$
Για $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ τω. $y_1+y_2+y_3 = 0$ εξετάζουμε το πρόσημο του:

$$y^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot y = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} y_2+y_3 \\ y_1+y_3 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \le 0.$$