Ορίζουμε $J_{\pi,N}(x_0) := \alpha^N J(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g(x_k, \mu_k(x_k))$.

όπου $\alpha^N J(x_N)$ είναι το τελικό κόστος

$$J_{\pi,N}(x_0) = T_{\mu_{N-1}}(\ldots(T_{\mu_1}(T_{\mu_0}J))\ldots)(x_0)$$

σύνθεση απεικονίσεων.

οπότε,

$$J_\pi(x) = \lim_{N\to+\infty} T_{\mu_{N-1}}(\ldots(T_{\mu_1}(T_{\mu_0}J))\ldots)(x_0).$$

Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες ύπαρξης λύσης του προβλήματος σταθερού σημείου $TJ^* = J^*$, τότε η εξίσωση (4) του Bellman έχει μοναδική λύση που είναι η βέλτιστη συνάρτηση κόστους J^*.

Συνθήκη ύπαρξης λύσης του προβλήματος σταθερού σημείου:

$$\|T_\mu J - T_\mu J'\| \le c\|J - J'\|$$

Δευτέρα 19/11/2012.

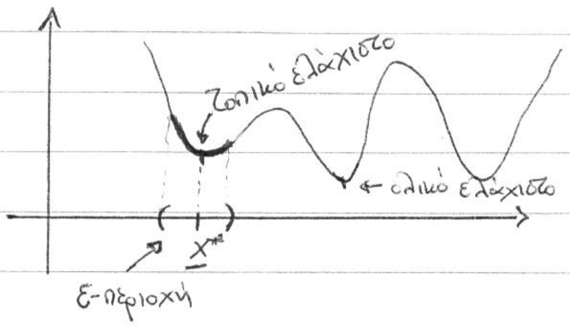
1. Το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Ψάχνουμε το $\max f(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Να βρεθεί $\underline{x}^*$ τ.ω. $f(\underline{x}^*) \ge f(\underline{x})$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
Το $\underline{x}^*$ λέγεται ολικό μέγιστο της f.

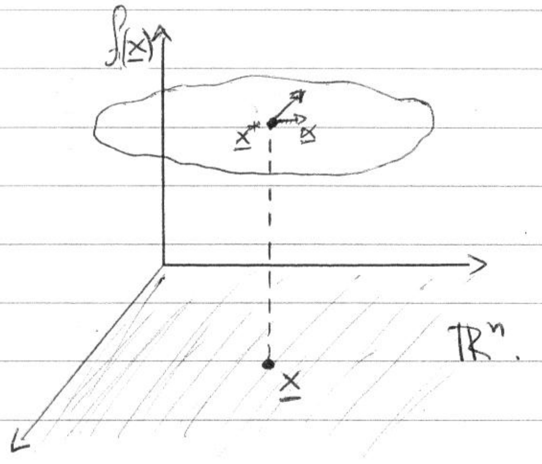
Παρατήρηση
Ένα σημείο $\underline{x}^*$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, τ.ω. $f(\underline{x}^*) \ge f(\underline{x})$, $\forall \underline{x}$ με $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

π.χ.



2. Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση
Το ανάδελτα, ή <u>βαθμίδα</u> (gradient) της f στο $\underline{x}$ είναι το διάνυσμα

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$



Η Jacobian ενός διανύσματος $\underset{(F_1, \dots, F_m)}{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

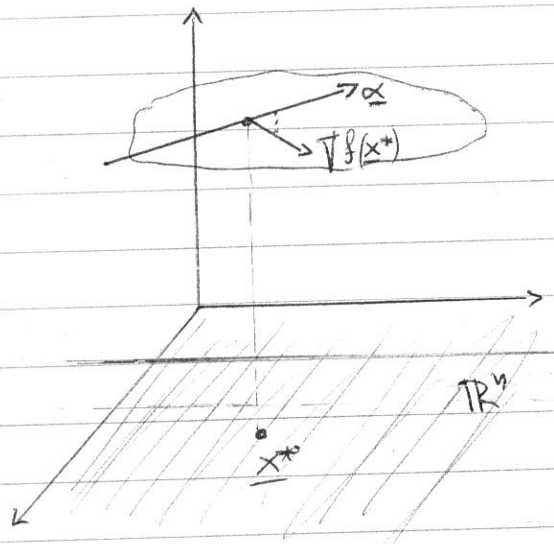
Ο πίνακας Hesse της f στο σημείο $\underline{x}$ είναι η Jacobian του διανύσματος ∇f στο σημείο $\underline{x}$

$$(Hf)(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}$$

Έστω $g_{\underline{\alpha}}(t) := f(\underline{x}^* + t\underline{\alpha})$ οι τιμές της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από το $x^* \in \mathbb{R}^n$ με κατεύθυνση $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Έχουμε τα εξής:

i) $g'_{\underline{\alpha}}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g_{\underline{\alpha}}(t) - g_{\underline{\alpha}}(0)}{t} = \ldots = \nabla f(\underline{x}^*) \cdot \underline{\alpha}$



directional derivative.

παράγωγος κατά κατεύθυνση.

ii) $g''_{\underline{\alpha}}(0) = \underline{\alpha}^T \cdot Hf(\underline{x}^*) \cdot \underline{\alpha}$

iii) ανάπτυξη σε Taylor:

$$f(\underline{x}^* + \underline{h}) = f(\underline{x}^*) + \nabla f(\underline{x}^*) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\, \underline{h}^T \cdot Hf(\underline{x}^*) \cdot \underline{h} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τάξη}}}{o}\big(\underbrace{\|h\|}_{(h^T \cdot h)^{1/2}}{}^2\big)$$

iv) Μορφή Lagrange:

$$f(\underline{x}^*+\underline{h}) = f(\underline{x}^*) + \nabla f(\underline{x}^*)\cdot \underline{h} + \frac{1}{2}\underline{h}^T \cdot Hf(\underline{z})\cdot \underline{h}$$

όπου $\underline{z}$ είναι ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα $\underline{x}^*$ κ' $\underline{x}^*+\underline{h}$,
δηλαδή $\underline{z} = \underline{x}^* + \vartheta \underline{h}$, $\vartheta \in (0,1)$.

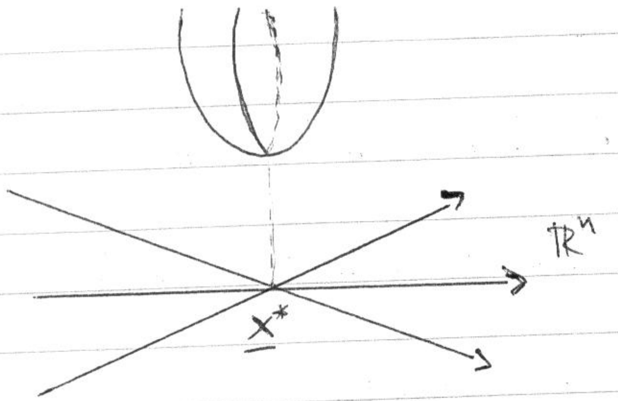
Θεώρημα
(αναγκαία συνθήκη τοπικού ελαχίστου)
Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση με τοπικό ελάχιστο το $\underline{x}^*$.
Τότε: i) $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$
ii) ο πίνακας $Hf(\underline{x}^*)$ είναι θετικά ημιορισμένος.
(δηλ. • $\underline{x}^T H f(\underline{x}^*)\,\underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
• θετικές ιδιοτιμές
κ' • οι άνω αριστεροί τετραγωνικοί υποπίνακες έχουν μη αρνητική ορίζουσα.)

Για θετικά ορισμένο πίνακα θέλω: θετική ορίζουσα κ' $\underline{x}^T Hf(\underline{x}^*)\underline{x} > 0$

Απόδειξη
Για κάθε κατεύθυνση $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, έστω η ευθεία $\underline{y}(t) = \underline{x}^* + t\underline{\alpha}$
κ' η συνάρτηση $g_{\underline{\alpha}}(t) = f(\underline{y}(t))$
Έχουμε: $g_{\underline{\alpha}}(t) = g_{\underline{\alpha}}(0) + g'_{\underline{\alpha}}(0)\cdot t + o(t)$

Αν $g'_{\underline{\alpha}}(0) < 0$, τότε για t αρκετά μικρό (τω. $o(t^2)$ πολύ μικρό)
$g_{\underline{\alpha}}(t) - g_{\underline{\alpha}}(0) < 0$
Άτοπο, γιατί το $\underline{x}^*$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Οπότε $g'_{\underline{\alpha}}(0) = \nabla f(\underline{x}^*)\cdot \underline{\alpha} \geq 0$, $\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.



επιλέγοντας $\underline{\alpha} = \pm e_i$, $i = 1, .., n$ (e_i = μοναδιαία διανύσματα)
βρίσκουμε ότι $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$

Επίσης αφού $g'_{\underline{\alpha}}(0) = 0$, έχουμε:

$$g_{\underline{\alpha}}(t) - g_{\underline{\alpha}}(0) = 0 + \frac{1}{2} g''_{\underline{\alpha}}(0) \cdot t^2 + o(t^2), \quad t \to 0.$$

ομοίως, $g''_{\underline{\alpha}}(0) = \underline{\alpha}^T Hf(\underline{x}^*) \underline{\alpha} \geq 0$, $\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$.

Άρα ο $Hf(x^*)$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Τετάρτη 21/11/2012

Θεώρημα

1. Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ με τοπικό ελάχιστο x^*.
   Τότε: i) $\nabla f(x^*) = 0$
   ii) ο πίνακας $Hf(x^*)$ είναι θετικά ημιορισμένος.
   ($\underline{x}^T Hf(x^*) \underline{x} \geq 0$.)

2. Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ κ' ισχύουν τα εξής:
   i) $\nabla f(x^*) = 0$
   ii) ο πίνακας $Hf(x^*)$ είναι θετικά ορισμένος