Παρασκευή 16/11/2012 (εκτός ύλης)

Π.χ. Δυναμικού Προγραμματισμού.
ντετερμινιστικός βέλτιστος έλεγχος

Έστω η δυναμική $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ (1)
όπου $x_k \in X$ είναι η κατάσταση του συστήματος
κ' $u_k \in U$ είναι ο έλεγχος.

Στη χρονική στιγμή k έχουμε το κόστος $\alpha^k g(x_k, u_k)$
όπου $\alpha \in (0,1]$

Ο έλεγχος είναι συνάρτηση της τρέχουσας κατάστασης
έστω $U(x) \subset U$.

Θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε διαλέγοντας από το χώρο πολιτικών / στρατηγικών $\Pi = \{\{\mu_0, \mu_1, \ldots\} : \mu_k \in M, k = 0, 1, \ldots\}$
$M = \{\mu : X \to U : \mu(x) \in U(x), \forall x \in X\}$.

Το συνολικό κόστος μιας στρατηγικής $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \ldots\}$ που ξεκινά από την αρχική κατάσταση x_0

$$J_\pi(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k g(x_k, \mu_k(x_k)) \qquad (2)$$

όπου η ακολουθία $\{x_k\}$ δίνεται από την (1), δεδομένης της στρατηγικής π:

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu_k(x_k)), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Η συνάρτηση βέλτιστου κόστους είναι $J^*(x_0) = \inf_{\pi} J_\pi(x_0)$ (3)

Για κάθε στρατηγική $\pi = \{\mu_0, \mu_1, \ldots\}$, θεωρούμε τη στρατηγική $\pi_1 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$J_\pi(x_0) = g(x_0, \mu_0(x_0)) + \alpha J_{\pi_1}\left(f(x_0, \mu_0(x_0))\right)$$

Τότε, $\forall x \in X$ έχουμε:

$$J^*(x) = \inf_{\pi = \{\mu_0, \pi_1\} \in \Pi} \left\{ g(x, \mu_0(x)) + \alpha J_{\pi_1}(f(x, \mu_0(x))) \right\}$$

$$= \inf_{\mu_0 \in \mathcal{M}} \left\{ g(x, \mu_0(x)) + \alpha \inf_{\pi_1 \in \Pi} \left\{ J_{\pi_1}(f(x, \mu_0(x))) \right\} \right\}$$

$$= \inf_{\mu_0 \in \mathcal{M}} \left\{ g(x, \mu_0(x)) + \alpha J^*(f(x, \mu_0(x))) \right\}.$$

Οπότε, η ελαχιστοποίηση ως προς $\mu \in \mathcal{M}$ μπορεί να γραφεί κ' ως προς $u \in U(x)$, επομένως εξίσωση του Bellman:

$$J^*(x) = \inf_{u \in U(x)} \left\{ g(x,u) + \alpha J^*(f(x,u)) \right\} \quad (4)$$

κ' αν έχει λύση, τότε $\mu^*(x) \in \arg\min_{u \in U(x)} \left\{ g(x,u) + \alpha J^*(f(x,u)) \right\}$

Για $x \in X$, $u \in U(x)$, έχουμε $H(x,u,J) = g(x,u) + \alpha J(f(x,u))$.

Ορίζουμε για $x \in X$: $(T_\mu J)(x) := H(x, \mu(x), J)$

$$(TJ)(x) := \inf_{u \in U(x)} H(x,u,J) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} (T_\mu J)(x)$$

Η εξίσωση του Bellman (4) μπορεί να γραφεί ως εξής: $J^* = TJ^*$

$T: \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(X)$: χώρος συναρτήσεων.

$J^* \longrightarrow TJ^*$

συνάρτηση

αυτό δεν είναι πολ/μός συναρτήσεων
είναι νέα συνάρτηση

Ορίζουμε $J_{\pi,N}(x_0) := \alpha^N J(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g(x_k, \mu_k(x_k))$.

όπου $\alpha^N J(x_N)$ είναι το τελικό κόστος

$$J_{\pi,N}(x_0) = T_{\mu_{N-1}}(\ldots(T_{\mu_1}(T_{\mu_0} J))\ldots)(x_0)$$

σύνθεση απεικονίσεων.

οπότε,

$$J_\pi(x) = \lim_{N\to+\infty} T_{\mu_{N-1}}(\ldots(T_{\mu_1}(T_{\mu_0} J))\ldots)(x_0).$$

Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες ύπαρξης λύσης του προβλήματος σταθερού σημείου $TJ^* = J^*$, τότε η εξίσωση (4) του Bellman έχει μοναδική λύση που είναι η βέλτιστη συνάρτηση κόστους J^*.

Συνθήκη ύπαρξης λύσης του προβλήματος σταθερού σημείου:

$$\|T_\mu J - T_\mu J'\| \leq c\|J - J'\|$$

Δευτέρα 19/11/2012.

1. Το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ψάχνουμε το $\max f(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Να βρεθεί $\underline{x}^*$ τ.ω. $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x})$, $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Το $\underline{x}^*$ λέγεται ολικό μέγιστο της f.

Παρατήρηση

Ένα σημείο $\underline{x}^*$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, τ.ω. $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x})$, $\forall\, \underline{x}$ με $\|x - x^*\| < \varepsilon$.