Θέλουμε όμως λύση όπου $x_{ij} \in \{0,1\}$

(Ειδική περίπτωση ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.)

Έστω $S = \{i \mid i$: κατάσταση του συστήματος$\}$ ο χώρος καταστάσεων.
$D(i)$: δέσμη αποφάσεων για την κατάσταση i.

(π.χ.
στο π.χ. 1 : σε ποια πόλη να πάμε
$(i,j) \in D(i)$)

$D = \bigcup_{i \in S} D(i)$: συνολικός χώρος των αποφάσεων

$\bar{D}(i)$ = το σύνολο των επόμενων καταστάσεων της i.

Οπότε, $\bar{D}(i) = \{ j \in S : (i,j) \in D(i) \}$

($\underset{\sim}{D(i)}$: π.χ. : ποια ακμή από την i να ακολουθήσουμε)

$D(i) = \{ (i,j) \in D : j \in \bar{D}(i) \}$

Τετάρτη 7/11/2012.

S : χώρος καταστάσεων
$D(i)$: δέσμη αποφάσεων για την κατάσταση i, $\forall i \in S$.
(π.χ. σε ποια πόλη j θα πάμε, $(i,j) \in D(i)$.)
$D = \bigcup_i D(i)$

$\bar{D}(i)$: το σύνολο των επόμενων καταστάσεων της i
(π.χ. $j \in \bar{D}(i)$).

Ισχύουν τα εξής:

$\bar{D}(i) = \{ j \in S : (i,j) \in D(i) \}$

$D(i) = \{ (i,j) \in D : j \in \bar{D}(i) \}$.

Πολιτική/Στρατηγική του προβλήματος είναι μια ακολουθία αποφάσεων

$\alpha : S \to D$

$i \mapsto \alpha(i)$

π.χ.

στο π.χ.1 :
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 6 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[r] & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 8 \\ & & 7 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Εισάγουμε το χρόνο $t = 1, 2, \ldots$ των βημάτων της μεθόδου

Έστω $V(t,x)$ το ελάχιστο κόστος για τα βήματα $t, t+1, \ldots, n$, όταν στην αρχή του χρόνου t είμαστε στην κατάσταση x.

Έστω $C_t(x,\alpha)$ το κόστος που αντιστοιχεί στην απόφαση α, όταν στο χρόνο t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x.

$$V(t,x) = \min_{\alpha \in D_t(x)} \{ C_t(x,\alpha) + V(t+1, \bar{\alpha}(x)) \}.$$

όπου $\bar{\alpha}(x)$ η νέα κατάσταση μετά το x μέσω της απόφασης α.

Έστω $x(t)$ η κατάσταση στο χρόνο t κ' έστω $x(t+1) = g_t(x(t), \alpha(t))$, όπου g_t γνωστή συνάρτηση.

($x(t+1) = g_t(x(t), \alpha(t))$: μεταβολή της κατάστασης στη συνάρτηση της απόφασης $\alpha(t)$.)

$\bar{\alpha}_t(x) = g_t(x, \alpha)$

(δηλ. $\bar{\alpha}_t(x)$ είναι ίσο με $x(t+1)$ που αντιστοιχεί στο "καλύτερο" $\alpha(t)$ τ.ω. η $\{ C_t(x,\alpha) + V(t+1, \bar{\alpha}(x)) \}$ να ελαχιστοποιείται)

$V(N, x) = \hat{c}(x)$: τερματικό κόστος

π.χ. 3

Παραγωγή n προϊόντων χρησιμοποιώντας m υλικά.

πρόβλημα:
$$\begin{cases} \max \underline{c}^T \underline{x} \\ [\underline{P}_1 \dots \underline{P}_n]\, \underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge 0 . \end{cases} \qquad A = [\underline{P}_1 \dots \underline{P}_n] \in M_{m \times n}$$

α_{ij} = απαιτούμενη ποσότητα από το υλικό i για την παρασκευή του προϊόντος j.

Έστω ότι στο βήμα t απομένουν $(y_1(t), \dots, y_m(t)) \equiv \underline{y}(t)$ ποσότητες των υλικών $1, \dots, m$

$(\underline{y}(t)$: χώρος καταστάσεων$)$

Έστω $x(t) \equiv x_t$ η ποσότητα του προϊόντος t που θα παρασκευάσουμε.

Θα πρέπει: $0 \le \alpha_{it} x_t \le b_i, \ \forall i$ $\qquad \boxed{0 \le \alpha_{it} x_t \le y_i(t), \ \forall i}$

Στο επόμενο βήμα: $\underline{y}(t+1) = \underline{y}(t) - \underline{P}_t \cdot x(t)$

Κέρδος: $c_t(\underline{y}(t), x(t)) = c_t x_t$

$$\hat{c}\,(\underline{y}(n+1)) = 0$$

Εξίσωση Βελτιστοποίησης:

Έστω $V(t, \underline{y})$ το μέγιστο συνολικό κέρδος από τα προϊόντα $t, t+1, \dots, n$, όταν γι' αυτά διατίθενται ποσότητες

$\underline{y} \equiv (y_1(t), \ldots, y_m(t))$ των υλικών $1, \ldots, m$

$$V(t, \underline{y}) = \max_{0 \le x(t) \le \frac{y_i(t)}{\alpha_{it}},\ \forall i} \{ c_t \cdot x(t) + V(t+1, \underline{y}(t) - \underline{P}_t \cdot x(t)) \}$$

$$V(n+1, \underline{y}) = 0$$

Για να ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος θα κάνω n βήματα, στο n-οστό βήμα θα έχω το μέγιστο κέρδος, στο n+1-βήμα το κέρδος θα είναι 0.

! Οι χώροι κατάστασης κ' απόφασης είναι μη πεπερασμένα σύνολα

$$t = n : V(n, \underline{y}) = \max_{0 \le x_n \le \frac{y_{in}}{\alpha_{in}},\ \forall i} \{ c_n x_n \}$$

$$t = n-1 : V(n-1, \underline{y}(n-1)) = \max_{x_{n-1}} \{ c_{n-1} x_{n-1} + V(n, \underline{y}(n-1) - \underline{P}_{n-1} x_{n-1}) \}$$

$$x_{n-1} \leftarrow \left\{ 0 \le x_{n-1} \le \frac{y_{i,n-1}}{\alpha_{i,n-1}} \right\}$$

Στην πραγματικότητα έχω μία συνάρτηση, που σε κάθε βήμα τη χρησιμοποιώ για να προκύψει νέα συνάρτηση που θα τη χρησιμοποιήσω στο επόμενο βήμα κ.ο.κ. έτσι ώστε να φτάσω στο 1ο βήμα $(t=1)$, όπου θα εμφανιστεί το $\underline{b}$ το οποίο είναι γνωστό κ' πηγαίνοντας επαγωγικά, θα λύσω το πρόβλημα.

π.χ.

Μια αυτοκινητοβιομηχανία θέλει να επενδύσει $6 \cdot 10^6$ €, επεκτείνοντας κάποια από τα 5 εργοστάσια στις χώρες $X_1, \ldots, X_5$.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
κόστος	2	4	3	1	5
απόδοση	3	7	5	3	7