κ' υπολογίζουμε $\hat{z}_j - c_j$ κ' αν είναι κάποιο αρνητικό συνεχίζουμε με simplex έως ότου γίναν θετικά.

β) Αν οι μεταβολές αφορούν κ' βασικές στήλες της άριστης λύσης, τότε ο B μεταβάλλεται κ' επομένως μεταβάλλονται κ' όλες οι στήλες του τελικού πίνακα.

Δείτε: αναφορά [1]

Δευτέρα 5/11/2012.

Δυναμικός Προγραμματισμός

Κεντρική ιδέα

Για να επιλύσουμε ένα δεδομένο πρόβλημα, το χωρίζουμε σε υποπροβλήματα, τα επιλύουμε κ' συνδυάζουμε τις επιμέρους λύσεις για να βρούμε τη συνολική.

Παρατήρηση

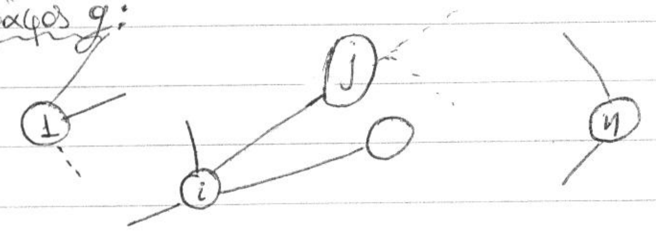
Κάθε υποπρόβλημα λύνεται μία μόνο φορά κ' αποθηκεύεται η λύση του.

(Richard Bellman '40-'53 (RAND))

Π.χ. 1

Έστω ένα σύνολο n πόλεων που συνδέονται με ένα δίκτυο δρόμων με μήκη c_{ij}. Ποια είναι η ελάχιστη διαδρομή από την πόλη 1 στην πόλη n;

γράφος g:



Έστω $v(i)$ το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από την πόλη i στην πόλη n.

Αρχή Βελτιστοποίησης του Bellman

Αν $S(i) = ((i,j), S(j))$ είναι η ελάχιστη διαδρομή από την πόλη i στην πόλη n τότε $S(j)$ είναι η ελάχιστη διαδρομή από την πόλη j στην πόλη n.

Οπότε έχουμε την (αναδρομική) εξίσωση βελτιστοποίησης: $v(i) = \min\limits_{(i,j)\in E(g)} \{c_{ij} + v(j)\}$

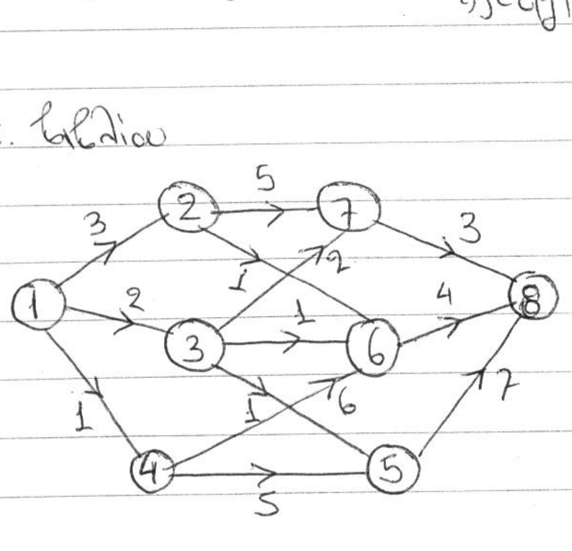
όπου g ο δεδομένος γράφος κι $E(g)$ το σύνολο των ακμών του.

$v(n) = 0$.

Η βέλτιστη γειτονική πόλη $j^*(i)$ δίνεται από τη σχέση:

$$c_{ij^*(i)} + v(j^*(i)) = v(i) = \min_{i,j\in E(g)} (c_{ij} + v(j))$$

π.χ. βιβλίου



$V(8)=0$

$V(7)=3 \qquad j^*(7)=8$

$V(6)=4 \qquad j^*(6)=8$

$V(5)=7 \qquad j^*(5)=8$

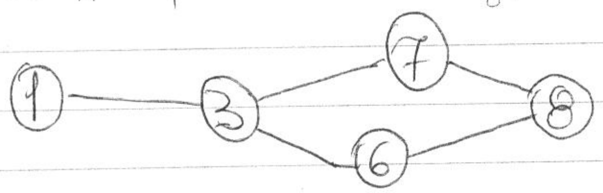
$V(4)=\min\{5+V(5),\ 6+V(6)\}=\min\{12,10\}=10 \qquad j^*(4)=6$

$V(3)=\min\{1+V(5),\ 1+V(6),\ 2+V(7)\}=\min\{8,5,5\}=5 \qquad j^*(3)=6,7$

$V(2)=\min\{1+V(6),\ 5+V(7)\}=\min\{5,8\}=5 \qquad j^*(2)=6$

$V(1)=\min\{3+V(2),\ 2+V(3),\ 1+V(4)\}=\min\{8,7,11\}=7 \qquad j^*(1)=3$

Άρα το ελάχιστο μονοπάτι είναι το εξής:



Ομοίως, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την προδρομική εξίσωση βελτιστοποίησης, έστω $w(i)$ ελάχιστη απόσταση από το 1 στο i, τότε $w(i)=\min\limits_{k,i\in E(g)}\{w(k)+c_{ki}\}$

(όταν π.χ. δεν είναι γνωστός ο χρονικός ορίζοντας)

π.χ. 2.

Το πρόβλημα του περιπλανώμενου πωλητή:

Ένας πωλητής ξεκινάει από την πόλη 1 κ' επιθυμεί να επιστρέψει σ' αυτήν, επισκεπτόμενος κάθε άλλη πόλη $2,\dots,n$ ακριβώς μία φορά, με τρόπο που να ελαχιστοποιεί την απόσταση.

Σε κάθε βήμα πρέπει να γνωρίζουμε το σύνολο S των πόλεων που έχει επισκεφθεί ο πωλητής.

Έχουμε τις καταστάσεις: (i, S)

Έστω $V_{|S|}(i,S)$ η ελάχιστη απόσταση από την πόλη 1 στην πόλη i με ενδιάμεσες πόλεις S.

$|S|$ = πλήθος των βημάτων που έχουν εκτελεστεί.

$$V_{|S|}(i,S)=\min_{(j,i)}\{c_{ij}+V_{|S|-1}(j,S\setminus\{i\})\}$$

$$V_1(i,\{i\})=c_{1i}$$, i η αμέσως 2η πόλη που επισκέπτεται ο πωλητής μετά την 1.

!! Στο σύνολο S ανήκει κι η πόλη i, στην οποία βρίσκεται ο πωλητής στο εκάστοτε βήμα, ενώ η πόλη 1 δεν ανήκει στο S, διότι είναι δεδομένο ότι ξεκινάει από την πόλη 1, άρα δε χρειάζεται να επισημανθεί ότι έχει περάσει από αυτή.

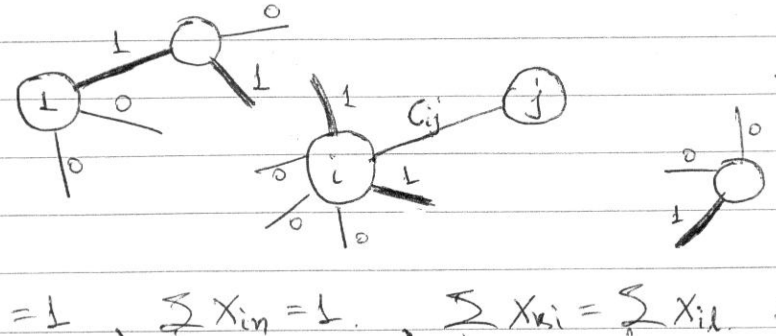
Διατύπωση μέσω γραμμικού Προγραμματισμού

π.χ. 1

Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής ≡ Πρόβλημα μεταφοράς μίας μονάδας προϊόντος από το στάδιο παραγωγής 1 στην πόλη n.

Έστω x_{ij} η μεταφερόμενη ποσότητα από το i στο j

Θέλουμε $\min\{\sum_{(i,j)\in E(g)} c_{ij}x_{ij}\}$



Γράφος g

$\sum_j x_{1j}=1$, $\sum_i x_{in}=1$, $\sum_k x_{ki}=\sum_l x_{il}\ \forall i$, $x_{ij}\geq 0$

Θέλουμε όμως λύση όπου $x_{ij} \in \{0,1\}$

(Ειδική περίπτωση ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού.)

Έστω $S = \{i \mid i :$ κατάσταση του συστήματος$\}$ ο χώρος καταστάσεων.
$D(i)$: δέσμη αποφάσεων για την κατάσταση i.

(π.χ.
στο π.χ. 1: σε ποια πόλη να πάμε
$(i,j) \in D(i)$)

$D = \bigcup_{i \in S} D(i)$: συνολικός χώρος των αποφάσεων

$\bar{D}(i) =$ το σύνολο των επόμενων καταστάσεων της i.

Οπότε, $\bar{D}(i) = \{ j \in S : (i,j) \in D(i) \}$

($D(i)$: π.χ. ποια ακμή από την i να ακολουθήσουμε)

$D(i) = \{ (i,j) \in D : j \in \bar{D}(i) \}$

Τετάρτη 7/11/2012.

S: χώρος καταστάσεων
$D(i)$: δέσμη αποφάσεων για την κατάσταση i, $\forall i \in S$.
(π.χ. σε ποια πόλη j θα πάμε, $(i,j) \in D(i)$.)
$D = \bigcup_i D(i)$

$\bar{D}(i)$: το σύνολο των επόμενων της i καταστάσεων
(π.χ. $j \in \bar{D}(i)$).