Ασκήσεις. 15/10/2012

Κανονική μορφή π.γ.π.

$$\pm \max c^T x$$
$$a_{ij} x_i = b_j$$
$$x_i \geq 0, \quad b \geq 0$$

Παράδειγμα: Έστω ότι μας δίνεται: $\max(x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4)$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 17$$
$$2x_1 - 5x_2 = 13$$
$$|x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4| \leq 20$$
$$x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_1, x_4 \geq 0 \quad x_2 \leq 0$$

- Βλέπουμε ότι όλα τα b θετικά.
- Παρατηρούμε ότι $x_2 \leq 0$. Άρα $x_2 = -x_2'$

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

Οπότε:

$$\max(x_1 - 4x_2' - x_3' + x_3'' + 3x_4)$$
$$x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 - x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \geq 17 \quad (2)$$
$$2x_1 + 5x_2' = 13 \quad (3)$$
$$|x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4| \overset{*}{\leq} 20$$

$$x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4 \geq 0.$$

* Το οποίο γίνεται: $x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4 \leq 20 \quad (4)$

$$x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4 \geq -20 \Rightarrow$$

$$\overset{\cdot(-1)}{\Rightarrow} -x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - 2x_4 \leq 20. \quad (5)$$

Επόμενος σκοπός να κάνω τις ανισότητες ; ισότητες:

$$\max\left(x_1 - 4x_2' - x_3' + x_3'' + 3x_4 + \overbrace{0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8}^{\text{αμα θέλουμε δεν τα γράφουμε}}\right)$$

$$x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - x_4 + \boxed{x_5} = 6$$
$$x_1 - x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \quad \boxed{-x_6} = 17$$
$$2x_1 + 5x_2' = 13$$
$$x_1 - x_2' - x_3' + x_3'' + 2x_4 \quad + x_7 = 20$$
$$-x_1 + x_2' + x_3' - x_3'' - 2x_4 \quad + x_8 = 20$$

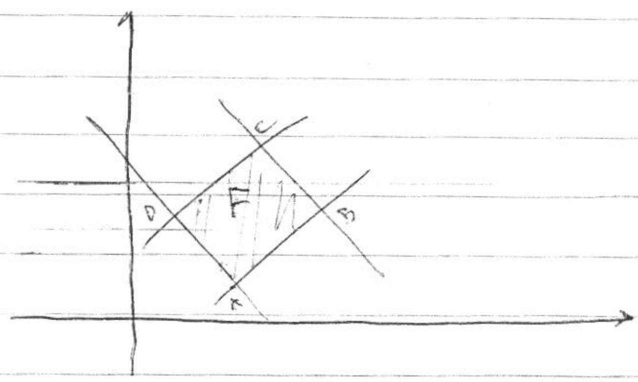
$$x_1, x_2, x_3'', x_3', x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Θεώρημα 2 σελ 27 (Φακίνος - Οικονόμου).

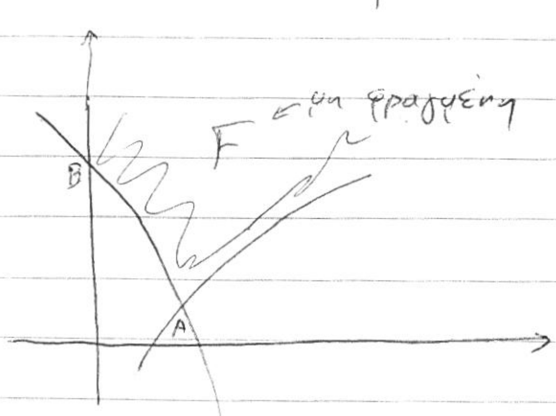
(I) Αν F φραγμένο σύνολο τότε η άριστη λύση πετυχαίνεται σε μια κορυφή.

(II) Αν δυο οι περισσότερες κορυφές είναι αριστες, τοτε κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι άριστη λύση.

Απόδειξη (I)



Αν x_1, x_2 = αριστες τότε $\forall\ x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ αριστη λύση του Π.Γ.Π.



1º ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ) Βλ. σελ 45/(v).

$z_k - c_k = 0$ για τις βασικές στήλες
Αν για κάποια P_k (όχι βασική στήλη) ισχύει $z_k - c_k = 0$ τότε καταλήγουμε σε μία άλλη λύση που δίνει την ίδια τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση. Συνεπώς άπειρο πλήθος αρίστων λύσεων.

Έχουμε: $\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 &\le 1 \\ x_2 + 2x_4 &\le 8 \\ x_i \ge 0, \quad i &= 1 \ldots 4 \end{aligned}$$

Το φέρνουμε σε κανονική μορφή:

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_2 - x_3 + \boxed{x_5} &= 1 \\ x_2 + 2x_4 + \boxed{x_6} &= 8 \\ x_i \ge 0 \ \forall \ i &= 1 \ldots 6 \end{aligned}$$

συντελεστές των x_1 σε όλους τους περιορισμούς

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \end{array}$$

$$I_{3\times3} = [P_1 \ P_5 \ P_6]$$

$$x_{i0} = (10, 0, 0, 0, 1, 8)$$

		C	-1	2	~~2~~ -3	~~0~~	0	0		
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	10/2	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	—	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	8/2	Γ_3
	Z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4

πιλότος

έχουμε $Z = Z_k - C_k$, όπου $Z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} C_j$

θα πρέπει όλα τα $z_k - c_k \geq 0$. Στο παράδειγμα μας δεν ικανοποιείται αυτό.

Ελέγχω κατά απόλυτη τιμή το $\max\{|z_k - c_k|,\ z_k - c_k < 0\}$ όσων $z_k - c_k < 0$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το -2 κατά απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερο.

Όμως με ποια στήλη θα το αντικαταστήσω?

Απ. Εδώ μας βοηθάει το Θ. Επιλέγουμε το min Θ. Οπότε το P_6 θα φύγει για να μπει στη θέση του το P_4.

Οπότε το νέο tableau γίνεται:

νέο tableau

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Θ	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	[illegible]	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 2\Gamma_3'$
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	1/2	$\Gamma_2' \ \Gamma_2 - 0\Gamma_3'$
P_4	0	8/2	0	1/2	0	1	0	1/2	8	$\Gamma_3' = \Gamma_3/2$
	Z	-2	0	$\boxed{0}$	2	0	0	1		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_3'$

$$\Gamma_s' = \frac{\Gamma_s}{2}$$ ← πιλότος

$$\Gamma_i' = \Gamma_i - x_{ij}\Gamma_s'$$

(10)

παρατήρηση: Αν για μη βασική στήλη παίρνει την τιμή 0 για τις διαφορές $z_k - c_k$ τότε έχουμε άπειρες λύσεις.

Στο νέο tableau δηλ. για τα $z_k - c_k$ έχουμε: **0** (αλλά είναι βασική στήλη) μετά το **0** (βλ. παρατήρηση) μετά **2** (που είναι θετικό δεν μας ενοχλεί) μετά **0** (βασική στήλη) μετά **0** (βασική στήλη) και τέλος **1** (δεν μας ενοχλεί διότι θετικό)

Άρα $x_1^* = (2, 0, 0, 4, 1, 0)$

Επειδή είναι άπειρες όμως κάνοντας νέο tableau, έχουμε:

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-1	3							
P_2	2	1/2	0	1	-1/2	0	1/2	0	
P_4	0	15/4							
	Z	-2	0	0	2	0	0	1	

Οπότε $x_2^* = (3, 1/2, 0, 15/4, 0, 0)$

$$\max c^t x_i^* = -2 \quad , i = 1,2$$

$$\forall x = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$$

Άριστη λύση $\rightarrow$ άπειρες λύσεις