12/10/2012

9/11/2012 Πρόοδος 11:00-13:00 (Ύλη: Γραμμικός Προγραμματισμός)

- Μέθοδος Simplex

1 Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι σε κανονική μορφή

$$\pm \max \underline{c}^T \underline{x} \quad (\text{ισοδύναμο με } \mp \min (-\underline{c})^T \cdot \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \quad , \ b \geq 0 \ , \ A \in M_{m \times n} \ , \ r(A) = m < n$$
$$\underline{x} \geq 0$$

2 Είναι γνωστή μια αρχική μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x_0}$

- Βασική: π.χ. όταν ο A εμπεριέχει τον μοναδιαίο. Δηλαδή είναι της Μορφής

$$A = \left(\begin{array}{c:c} I & \ldots \end{array} \right)$$

αλλιώς εισάγαμε νέες μη αρνητικές μεταβλητές (M-μέθοδος)

- Εφικτή: $(\underline{x_0} \geq 0)$ Δηλαδή οι συντεταγμένες του $\underline{x_0}$ να είναι θετικές π.χ. Αν έχω

$$A = \left(\begin{array}{c:c} I_m & \ldots \end{array} \right)$$

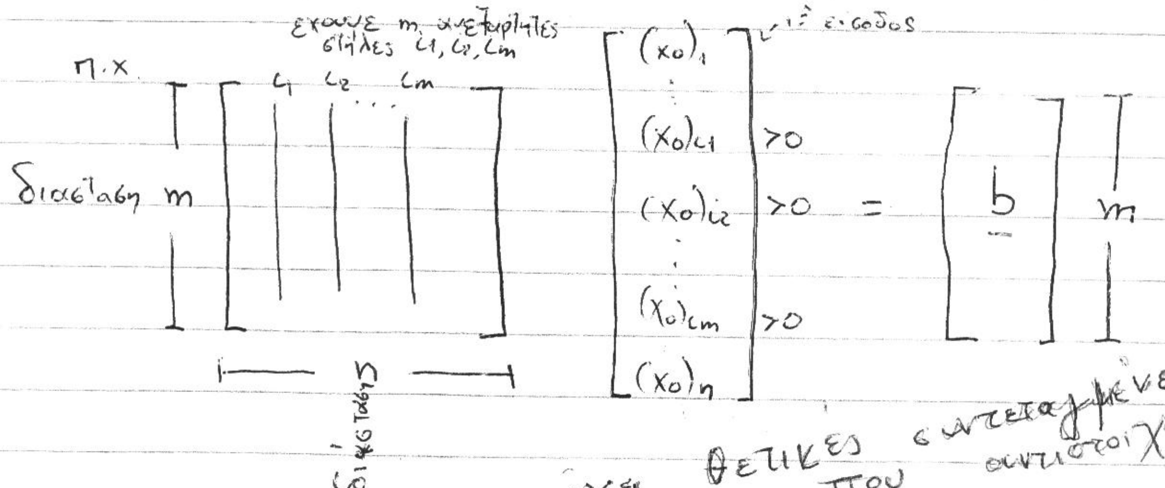
παίρναμε σαν βάση $B = I_m$ (το μοναδιαίο). Μια αρχική λύση $B\underline{x_0} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x_0} = \underline{b}$

μόνο με m συντεταγμένες διότι ο A είναι πολ/μενος με το $\underline{x}$ και είναι της μορφής

$$A = \left(\begin{array}{c:c} I_m & \ldots \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_m \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

οπότε αν $\underline{b} \geq 0$ τότε $\underline{x_0} = B^{-1}\underline{b} = b \geq 0$ είναι εφικτή λύση.

– Μια εκφυλισμένη είναι αν η $\underline{x_0}$ έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες (δηλαδή αντιστοιχεί σε μία βάση με m διανύσματα)



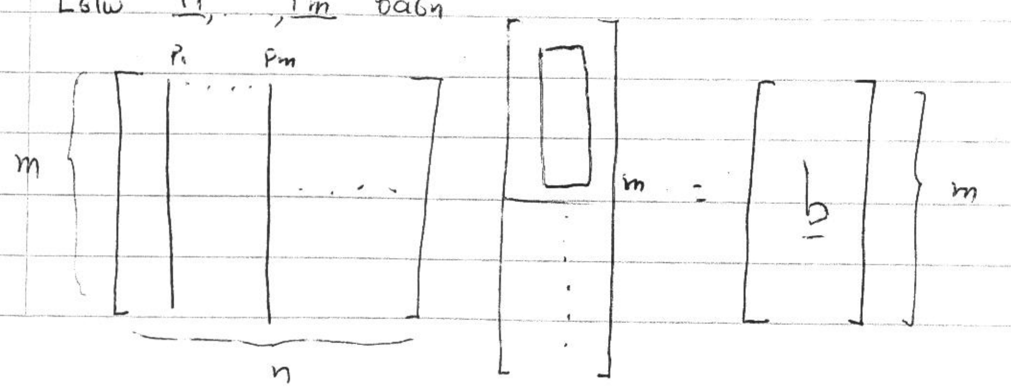
~~Όπου~~ Όπου το διάνυσμα x_0 ~~που~~ έχει θετικές συντεταγμένες εκείνες που αντιστοιχούν περιέχει τα διάφορα ~~x_0 των~~ ανεξαρτήτων στήλες στις ανεξ. } του A. Οι υπόλοιπες είσοδοι είναι μηδέν.

~~τα οποία είναι θετικά και τα υπόλοιπα x_0 των άλλων είναι μηδέν τότε έχουμε μία εκφυλισμένη λύση.~~

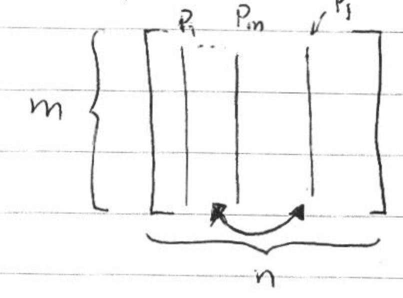
• Τι κάνω αν έχω εκφυλισμένη?

Απ: Αν όμως είναι εκφυλισμένη (αν π.χ. το $\theta_0 = \min\{\ \}$ πετυχαίνεται σε περισσότερες από μία γραμμές) η λύση δεν βελτιώνεται. Σε αυτή την περίπτωση τρέπουμε την εκφυλισμένη λύση σε μη εκφυλισμένη αντικαθιστώντας το 0 (μηδέν) από ένα αυθαίρετα μικρό ϵ, προχωρούμε με την επίλυση και όταν βρούμε την άριστη θέτουμε $\epsilon = 0$

Έστω $\underline{P_1}, \dots, \underline{P_m}$ βάση



Σημείωση: Μια κορυφή αντιστοιχεί σε m γραμ. ανεξάρτητες στήλες. Αν θέλουμε να βρούμε μια άλλη κορυφή απλά αντικαθιστούμε μια στήλη από τις $P_i, \dots, P_m$ με μια καινούρια στήλη $\underline{P_j}$ η οποία είναι και αυτή γραμ. ανεξάρτητη ως προς τις προηγούμενες, και έτσι έχουμε μια νέα κορυφή. Δηλ.



$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$$

1. Το κριτήριο για το αν έχει τελειώσει ο αλγόριθμος:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$$

ήταν αν $Z_j - c_j \geq 0 \ \forall j$ και τότε είχαμε την άριστη λύση.

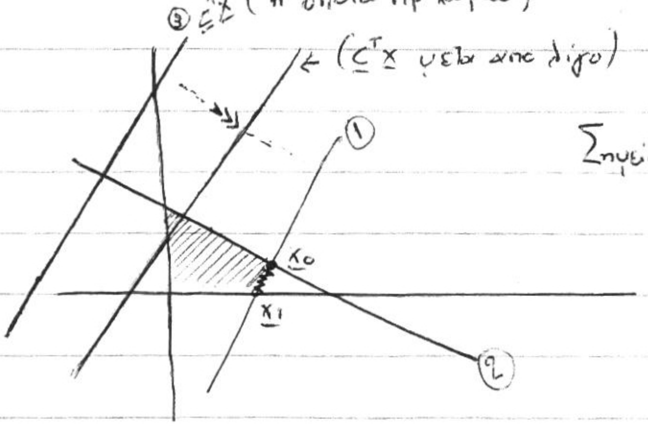
2. Αν όμως $Z_j - c_j < 0$ για κάποιο j τότε συνεχίζουμε έως ότου γίνουν όλα θετικά.

Στην 1 περίπτωση μπορεί για κάποιο j από τις <u>μη βασικές στήλες</u> να έχουμε $Z_j - c_j = 0$. Τότε αλλάζοντας μια βασική στήλη με τη j, η λύση να είναι επίσης άριστη.

κόστος να πάω από την κορυφή x_0 στη κορυφή x_1 $\left(\underline{c}^T \underline{x}_1 = \underline{c}^T \underline{x}_0 + \theta_0 |Z_j - c_j| \right)$

↑ αν αυτή η διαφορά είναι μηδέν τότε θα έχω $\underline{c}^T x_1 = \underline{c}^T x_0$ δηλαδή θα είναι και η $\underline{x}_0$ και η $\underline{x}_1$ άριστη.

Με λίγα λόγια ειμαστε στην περίπτωση απειρου πληθους λυσεων.
(κυρτος συνδυασμος των $\underline{x}_0$ ς $\underline{x}_1$) { $\underline{x}\lambda = \lambda \underline{x}_0 + (1-\lambda)(\underline{x}_1)$ $\forall \lambda \in (0,1)$



Σημειωση: ① // ③

Στη πορεία της η $\underline{c}^T x$ ή αλλιως η ευθεία ③ θα παει "πάνω" στην ① διοτι ειναι // (παραλληλες) και ως αριστες λυσεις θα ειναι όλα τα σημεία που περιεχονται στα $\underline{x}_0$, $\underline{x}_1$

- $\pm \max \underline{c}^T \underline{x} = \mp \min (-\underline{c}^T) \cdot \underline{x}$, $\hat{\underline{c}} = -\underline{c}$

π.χ. το κριτηριο βελτιστης λυσης της Simplex για το $\min \hat{\underline{c}}^T \underline{x}$ θα ειναι $z_j - \hat{c}_j \leq 0$

$\underset{\sum x_{ij} c_i}{\parallel}$

► Τι γίνεται αν το $\underline{b}$ έχει κάποιο αρνητικό στοιχείο?

Δηλαδη έχουμε μια βασική λύση που όμως δεν είναι εφικτή. Αν επιπλέον έχουμε ότι $z_j - c_j \geq 0$ $\forall j$ * τοτε εχουμε μια βασικη εφικτη λύση του **δυϊκού** προβληματος :
$\lambda^T = \underline{c}_B B^{-1}$

Θυμίζουμε: $\left.\begin{matrix} \max \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \end{matrix}\right\}$ Αρχικό π.γ.π. (μεγιστοποιηση κερδους) , $\left.\begin{matrix} \min \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ \underline{\lambda}^T A \geq \underline{c}^T \end{matrix}\right\}$ δυϊκό π.γ.π. (ελαχιστοποιηση κοστους)

Θέλουμε να λύσουμε το αρχικό με μέθοδο Simplex όταν $b<0$. Δεν γίνεται οπότε θα πάμε στο δυϊκό του και ύστερα θα επιστρέψουμε στο αρχικό.

Όντως, $\lambda^T A = \underline{c}_B B^{-1} A \overset{*}{\geq} \underline{c}^T$

Εφικτή όχι για το αρχικό αλλά για το δυϊκό

Λέμε τότε ότι η λύση $\underline{x}_B = B^{-1} b$ του αρχικού είναι "δυϊκώς εφικτή" (Αν $\underline{x}_B > 0$ τότε είναι εφικτή και για το αρχικό και άρα βέλτιστη)

Οπότε έχοντας μια βασική εφικτή λύση του δυϊκού μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε το δυϊκό πρόβλημα.