10/10/2012

- Γεωμετρική ερμηνεία

(αντιστοίχιση βάσης και δυϊκού διανύσματος $\underline{\lambda}$)

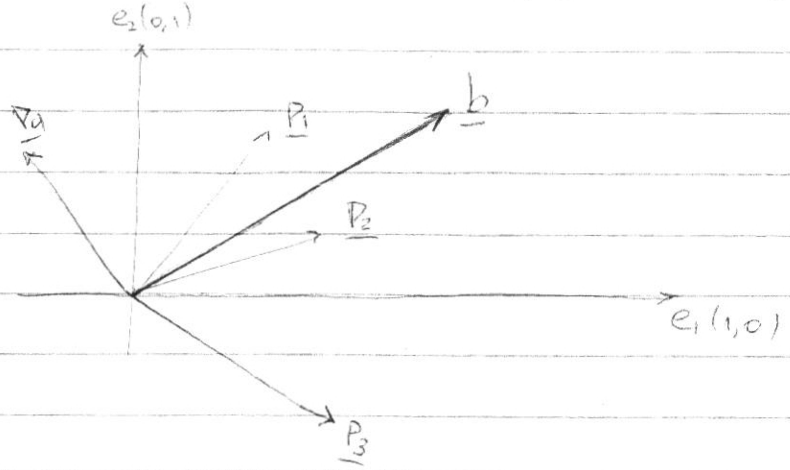
έχουμε υπόψιν το πρόβλημα της δίαιτας

Πρω

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\underline{P_1}$ $\underline{P_2}$ $\underline{P_3}$ $\underline{P_4}$

ελαχ. $c_1x_1 + \dots + c_4x_4$

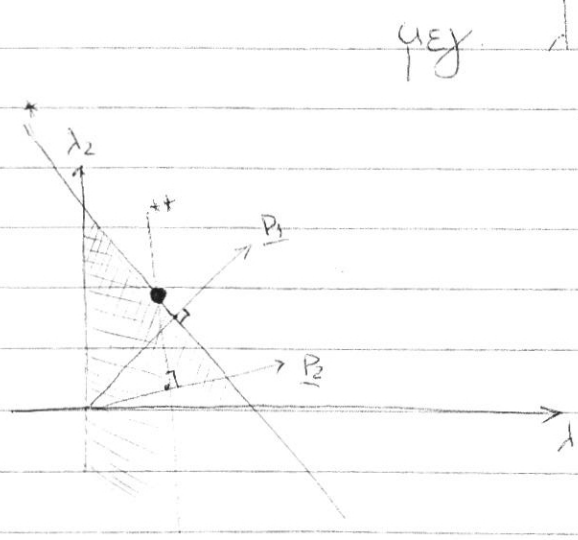


Έστω $B = (\underline{P_1}\ \underline{P_2})$ μια βάση (όχι βέλτιστη απαραίτητα)

$\underline{b} = x_1\underline{P_1} + x_2\underline{P_2}$ (γράφω το $\underline{b}$ σαν γραμμ. συνδυασμός των $\underline{P_1}, \underline{P_2}$)

Δυϊκό: $(\lambda_1\ \lambda_2)(\underline{P_1}\ \underline{P_2}\ \underline{P_3}\ \underline{P_4}) \le (c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$

μεγ. $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \underline{\lambda}^T \underline{b}$



* $\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} \le c_1$ εx(1)

** $\lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} \le c_2$ εx(2)

Κάθε διάνυσμα P_i ορίζει έναν περιορισμό στο δυϊκό: ημιεπίπεδο του οποίου το όριο είναι κάθετο στο P_i και το ακριβές σημείο που στέκεται εξαρτάται από το αντίστοιχο c_i

Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού μεγιστοποιείται σε κάποιο άκρο της δυϊκής εφικτής περιοχής : σ' αυτό το σημείο (●) (βλ. σχήμα) έχουμε δύο ενεργούς περιορισμούς του δυϊκού που αντιστοιχούν σε μια βέλτιστη βάση του αρχικού.

Πράγματι η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού

$$\underline{\lambda}^T \underline{b} = (\lambda_1 \lambda_2)^T (x_1 \underline{P_1} + x_2 \underline{P_2}) = \lambda_1 x_1 \alpha_{11} + \lambda_2 x_1 \alpha_{21} + \lambda_1 x_2 \alpha_{12} + \lambda_2 x_2 \alpha_{22}$$
$$= x_1 (\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21}) + x_2 (\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22})$$

Από σχ(1), σχ(2) $\Rightarrow = x_1 c_1 + x_2 c_2$

▸ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ της σχέσης μεταξύ μιας βάσης της μεθόδου Simplex και του δυϊκού διανύσματος $\underline{\lambda}$. Έστω μία βάση B και έστω το διάνυσμα $\underline{\lambda}^{(B)} \overset{\text{ορισμός}}{:=} \underline{c}_B B^{-1}$. Το διάνυσμα αυτό δεν είναι ακόμα λύση του δυϊκού προβλήματος παρά μόνο όταν η βάση B είναι βέλτιστη βάση του αρχικού προβλήματος. Για κάθε τυχαία βάση $B = (\underline{P_1} \ldots \underline{P_m})$ κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί σαν γραμμ. συνδυασμός των διανυσμάτων της. Έστω c_i, $i = 1, \ldots, m$ το κόστος που αντιστοιχεί σε κάθε διάνυσμα $\underline{P_i}$ (π.χ. το κόστος του φαγητού i στο παράδειγμα της δίαιτας). Οπότε

ΟΡΙΣΜΟΣ: το κόστος κάθε δεδομένου διανύσματος d έστω $\underline{d} = y_1 \underline{P_1} + \ldots + y_m \underline{P_m}$ ως προς τη βάση $B = (\underline{P_1} \ldots \underline{P_m})$ δίνεται από τη σχέση: $C_B(\underline{d}) := y_1 c_1 + \ldots + y_m c_m$

Για παράδειγμα, αφού

$$\underbrace{\left[e_1 \dots e_j \dots e_m \right]}_{\text{μοναδιαίος}} = \underbrace{\left[\underline{P}_1 \dots \underline{P}_m \right]}_{B} \cdot B^{-1}$$

$$B^{-1} = \left[\; | \; | \dots \begin{matrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{matrix} \dots | \; | \; \right]$$

$$= \left[\; \underset{\text{οποίοιες στήλες}}{|} \; | \dots y_{1j} \underline{P}_1 + \dots + y_{mj} \underline{P}_m \quad | \; | \; \right] \quad \text{και}$$

επειδή $(\lambda_1 \dots \lambda_j \dots \lambda_m) = \underline{c}_B B^{-1}$

$$\underline{c}_B (e_j) = \lambda_j .$$

Άρα $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ είναι οι συνθετικές τιμές των μοναδιαίων διανυσμάτων και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το συνθετικό κόστος οποιουδήποτε διανύσματος. π.χ. το κόστος του διανύσματος

$$\underline{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ είναι } = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{mj} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^T \underline{P}_j =$$

$= \lambda_1 a_{1j} + \dots + \lambda_m a_{mj}$. Αυτό λέγεται συνηθώς αποτίμηση του διανύσματος $\underline{P}_j$ μέσω των $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Όταν στο τέλος βρούμε τη βέλτιστη βάση B^* του αρχικού π.γ.π:
(Γνωρίζουμε ότι ισχύει αυτό): $\underline{\lambda}^T \underline{P}_j \leq c_j \quad , j = 1 \dots, n$

ή

$$\underline{\lambda}^T A \leq \underline{c}^T$$

Τότε καθε διάνυσμα $\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n$ είναι φθηνότερο να κατασκευασθεί από τη βάση παρά να αγορασθεί κατευθείαν στη τιμή του $c_1, \dots, c_n$.

Οι βέλτιστες λύσεις του αρχικού και του δυϊκού προβλήματος ικανοποιούν το ακόλουθο:

- ΘΕΩΡΗΜΑ (μη συμμετρική μορφή)

Έστω $\underline{x}$ εφικτή λύση του αρχικού $\begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$ σχ(1)

και $\underline{\lambda}$ εφικτή λύση του δυϊκού $\begin{cases} \max \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ \lambda^T A \leq \underline{c} \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$ σχ(2)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε και οι δύο να είναι βέλτιστες λύσεις:

i) αν $\forall i$, $x_i > 0 \Rightarrow \underline{\lambda}^T \underline{P_i} = c_i$

ii) αν $\underline{\lambda}^T \underline{P_i} < c_i \Rightarrow x_i = 0$

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$

Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες, τότε

$$(\underline{\lambda}^T A - \underline{c}^T)\,\underline{x} = 0 \overset{(A\underline{x}=\underline{b})}{\Rightarrow} \underbrace{\underline{\lambda}^T \underline{b} = \underline{c}^T \underline{x}} \xrightarrow{\text{Πόρισμα}} \lambda, x \text{ βέλτιστες}$$

όταν η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι ίση με την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού τότε οι αντίστοιχες λύσεις είναι βέλτιστες

Έστω ότι $\underline{\lambda}, \underline{x}$ βέλτιστες τότε $\underline{\lambda}^T \underline{b} = \underline{c}^T \underline{x} \Rightarrow (\underline{\lambda}^T A - \underline{c}^T)x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (i), (ii) ισχύουν

- ΘΕΩΡΗΜΑ (συμμετρική μορφή)

Έστω $\underline{x}$, $\underline{\lambda}$ εφικτές λύσεις (λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος, δηλ. τις ανισότητες αλλά προσοχή μπορεί να μην είναι οι βέλτιστες). Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι βέλτιστες λύσεις του προβλήματος

$$\left.\begin{array}{c} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} \max \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ \lambda^T A \leq c \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow Q_1 \\ \vdots \\ \leftarrow Q_m \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ P_1 & \cdots & P_n \end{array} \end{array}$$

i) Αν: $x_i > 0 \xRightarrow{\text{τότε}} \underline{\lambda}^T \underline{P_i} = c_i$ (έστω πετύχει τη βέλτιστη λύση)

ii) $\underline{\lambda}^T P_i < c_i \xRightarrow{\text{τότε}} x_i = 0$

iii) Αν $\lambda_j > 0 \xRightarrow{\text{τότε}} Q_j x = b_j$

iv) Αν $Q_j x > b_j \xRightarrow{\text{τότε}} \lambda_j = 0$

- Παράδειγμα: Στο πρόβλημα της δίαιτας έστω ότι η βέλτιστη δίαιτα ($\underline{x}^*$) δίνει περισσότερη ποσότητα από τη b_j (της j ουσίας). Αυτό σημαίνει με βάση το θεώρημα ότι ο διαιτολόγος δεν θα ήθελε να πληρώσει επιπλέον για περισσότερη ποσότητα αυτής της ουσίας. Αυτό σημαίνει ότι από το (iv) του θεωρήματος ότι $\lambda_j = 0$ δηλαδή η φαρμακευτική εταιρεία πρέπει να δίνει την κάψουλα j δωρεάν.

x^*: πόση ποσότητα από το κάθε φαγητό