08/10/2012

Έστω το π.γ.π σε ημικανονική μορφή:

$$\left.\begin{array}{c} \pm\max\ \underline{c}^T\underline{x} \\ A\underline{x}\le\underline{b} \\ \underline{x}\ge 0 \end{array}\right\} \ (1) \qquad \underline{x}\in \mathbb{M}_{n\times 1},\quad A\in\mathbb{M}_{m\times n}$$

Το δυϊκό πρόβλημα του (1) δίνεται από:

$$\left.\begin{array}{c} \pm\min\ \underline{\lambda}^T\underline{b} \\ A^T\underline{\lambda}=\underline{\lambda}^T A\ge\underline{c}^T \\ \underline{\lambda}\ge 0 \end{array}\right\} \ (2) \qquad \underline{\lambda}\in\mathbb{M}_{m\times 1}$$

Λήμμα 1: Το δυϊκό πρόβλημα του (2) είναι (1)

<u>Απόδειξη</u>:

$$(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \mp\max\ (-\underline{b})^T\underline{\lambda} \\ \cancel{A^T\lambda}\ (-A)^T\underline{\lambda}\le-\underline{c} \\ \underline{\lambda}\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

← μεταφιέρη της 2 σε ν-μορφή γιατί μόνο της 1 ξέρουμε το δυϊκό

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \mp\min\ \underline{x}^T(-\underline{c}) \\ \underline{x}^T\cdot(-A^T)\ge(-\underline{b}) \\ \underline{x}\ge 0 \end{array}\right\} \equiv \begin{array}{c} \pm\max\ \underline{x}^T\underline{c} \\ A\underline{x}\le\underline{b} \\ \underline{x}\ge 0 \end{array}$$

Λήμμα 2: Αν x και λ είναι εφικτές λύσεις των (1) & (2) αντίστοιχα τότε:

$$\underline{c}^T\cdot\underline{x}\le\underline{\lambda}^T\cdot\underline{b}$$

Απόδειξη: ① $\Rightarrow \underline{A}\underline{x} \le \underline{b} \Rightarrow \underline{\lambda}^T A \underline{x} \le \lambda^T \underline{b}$

② $\Rightarrow \underline{\lambda}^T A \ge \underline{c}^T \Rightarrow \lambda^T A x \ge \underline{c}^T \underline{x}$

$\Rightarrow \underline{c}^T x \le \underline{\lambda}^T \underline{b}$

περιορισμος δυικού προβλήματος

- Πόρισμα: Αν $\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\lambda}}$ είναι εφικτές λύσεις των προβλημάτων ① & ② και $\underline{c}^T \cdot \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{\lambda}}^T \underline{b}$ (*) τότε είναι άριστες (οι $\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{\lambda}}$).

Απόδειξη: Έστω $\underline{x}$ μια γενική εφικτή λύση του ①. Τότε απο Λήμμα 2:
$\underline{c}^T \cdot \underline{x} \le \hat{\underline{\lambda}}^T \underline{b} \overset{(*)}{=} \underline{c}^T \hat{\underline{x}} \quad \forall \ \underline{x}$

▸ Θεώρημα: (i) Αν το ① έχει άριστη λύση τότε και το δυϊκό πρόβλημα ② έχει άριστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων είναι ίσες.

(ii) Αν το ① είναι μη φραγμένο τότε το δυϊκό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις.

Απόδειξη: (i) Εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές $\underline{y}$ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &\max\ (\underline{c}^T \cdot \underline{x} + \underline{0}^T \cdot \underline{y}) \\ &[A \mid I_{m\times m}] \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b} \\ &\underline{x}, \underline{y} \ge \underline{0} \end{aligned}\right\} ③$$

Το δυϊκό του ③ δίνεται απο:

$$\begin{aligned} &\min\ \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ &\underline{\lambda}^T (A \mid I_{m\times m}) \ge (\underline{c}, \underline{0}) \Leftrightarrow \lambda^T A \ge \underline{c} \\ &\underline{\lambda} \ge 0 \end{aligned}$$

Έστω ότι το ① έχει άριστη λύση $\hat{\underline{x}}$ και έστω $B=(P_{i1},\ldots,P_{im})$ η βάση της.

Αλγόριθμος Simplex. (Ίδιο παράδειγμα με το πρώτο του Αλγορίθμου)

$$\begin{array}{c|cc} \underline{b} & A & I \\ 0 & -\underline{c}^T & \underline{0}^T \\ & \underset{\underline{z}-\underline{c}}{\uparrow} & \end{array}$$

Οπότε $\hat{\underline{x}}$ στο παράδειγμά μας $(12, 6, 0, 0, 15)$

Στο τέλος του αλγορίθμου Simplex έχουμε:

$$\begin{array}{c|cc} \underline{B^{-1}\underline{b}} & B^{-1}A & B^{-1} \\ \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} & \underline{c}_B^T B^{-1}A-\underline{c}^T & \underline{c}_B^T B^{-1} \end{array}$$

Αλλά η βάση B αντιστοιχεί στην άριστη λύση $\hat{\underline{x}}$ οπότε $\hat{\underline{x}}_B = B^{-1}\underline{b}$ και επιπλέον $z_j-c_j \geq 0$, $\forall j=1,\ldots,n$

δηλ. $\left.\begin{array}{l} \underline{c}_B^T B^{-1}A \geq \underline{c}^T \\ \underline{c}_B^T B^{-1} \geq \underline{0} \end{array}\right\}$

Τότε το διάνυσμα $\hat{\underline{\lambda}}^T := \underline{c}_B^T B^{-1}$ είναι άριστη λύση του (δυϊκού ②)

Πράγματι $\hat{\underline{\lambda}}^T A = \underline{c}_B^T B^{-1} A \geq \underline{c}^T$ και είναι εφικτή ως θετική λύση.

Επίσης, $\hat{\underline{\lambda}}^T \cdot \underline{b} = \underline{c}_B^T \underbrace{B^{-1}\cdot\underline{b}}_{\hat{\underline{x}}_B} = \underline{c}_B^T \hat{\underline{x}}_B = \underline{c}^T\hat{\underline{x}}$. Οπότε από

το πόρισμα η $\hat{\lambda}$ είναι άριστη λύση

οπότε στο παράδειγμά μας είναι το $(2\ 1\ 0)$ → λύση του δυϊκού

ii) Έστω ότι το ① είναι μη φραγμένο.

$$\max\{\underline{c}^T\underline{x} : \underline{x} = F\} = +\infty$$

και ας υποθέσουμε ότι το ② (δυϊκό πρόβλημα) έχει εφικτή λύση λ.

Τότε από Λήμμα 2: $\underline{\lambda}^T\underline{b} \geq \underline{c}^T\underline{x} \Rightarrow$ ~~$+\infty$~~

$\underline{\lambda}^T\underline{b} = +\infty$ Άτοπο αφού τα b_i είναι πεπερασμένα
για να κάνει $+\infty$ θα πρέπει $\lambda^{T} = +\infty$ όπου δεν γίνεται.

\- Σημείωση: Αν γνωρίζουμε ποιες μεταβλητές είναι βασικές στην άριστη λύση του ① τότε μπορούμε να βρούμε αμέσως την άριστη λύση του δυϊκού, η οποία δίνεται από: $\hat{\underline{\lambda}}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$ κάτι που δίνεται από τον τελικό πίνακα Simplex. Επίσης η συντεταγμένη λ_i της άριστης λύσης είναι ακριβώς η διαφορά $Z_{n+i} - C_{n+i}$

Ευαισθησία: Έστω το π.γ.π.
$$\left.\begin{array}{l} \min \underline{c}^T\underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{array}\right\}$$

Έστω ότι B η βέλτιστη βάση με αντίστοιχη λύση $(\underline{x}_B, \underline{0})$ όπου $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$. Έστω ότι $\underline{b}' = \underline{b} + \Delta\underline{b}$. Η νέα βέλτιστη λύση: $\underline{x}_{B}' = \underline{x}_B + \Delta\underline{x}_B$, όπου $\Delta\underline{x}_B = B^{-1}\Delta\underline{b}$ και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι: $Z + \Delta Z = Z + \underline{c}_B^T\Delta\underline{x}_B = Z + \underline{\lambda}^T\Delta\underline{b}$

διότι: $(\underline{\lambda} = \underline{c}_B B^{-1})$

συντελεστής ευαισθησίας