05/10/2012

Συνέχεια: Αν το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτή λύση, έστω $\underline{x}_0$ τότε η $\binom{\underline{x}_0}{0}$ είναι εφικτή λύση του επαυξημένου Π.Γ.Π. και καλύτερη απο κάθε άλλη εφικτή λύση που έχει μιά τουλάχιστον τεχνητή μεταβλητή με θετική τιμή (αφού $M \lll$)
Αρα η άριστη λύση του επαυξημένου Π.Γ.Π. θα έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με μηδέν.

Π.χ. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}^T = (2, -3, 1, 2), \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Λύση:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Οπότε η αρχική βασική λύση: $(\underline{x_1}, x_2, x_3, x_4, \underline{y_1}, \underline{y_2})$ με πολ/μο με $\underline{b}$ επαγμε

$(8, 0\,0\,0, 6, 3)$

Στον αλγόριθμο στη θέση $\underline{c}_B$ εισάγουμε $M \ll$

$$\underline{c}_B = (2, M, M)$$

Το ΔΥΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ημικανονική μορφή:
$$
(1)\quad \begin{cases} \pm\max \ \underline{c}^T \underline{x}, & \underline{c}, \underline{x} \in M_{n\times 1} \\ A\underline{x} \le \underline{b}, & \underline{b} \in M_{m\times 1} \\ x \ge 0 & A \in M_{m\times n} \end{cases}
$$

i) Το διάνυσμα $\underline{b}$ δεν είναι κατ' ανάγκη θετικό

ii) Μπορούμε να το μετατρέψουμε σε κανονική μορφή:
$$
A\underline{x} = \underline{b} \iff \begin{Bmatrix} -A\underline{x} \le -\underline{b} \\ A\underline{x} \le \underline{b} \end{Bmatrix}
$$

Το δυϊκό πρόβλημα του (1) δίνεται από:
$$
\begin{aligned} &\pm\min \ \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ &\underline{\lambda}^T A \ge c \\ &\underline{\lambda} \ge 0 \end{aligned}
$$

Παράδειγμα 1 (Το πρόβλημα της δίαιτας)

Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι ποσότητες n φαγητών, $c_1, \dots, c_n$ το κόστος τους και έστω ότι καθένα από τα φαγητά περιέχει m θρεπτικές ουσίες. Θέλουμε να βρούμε ένα συνδυασμό των n φαγητών ούτως ώστε να καλύψουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα από τις θρεπτικές ουσίες, έστω $\underline{b} = (b_1, \dots b_m)$ αυτές οι ποσότητες.

Λύση:

$$
\begin{array}{c} 1 \\ \\ m \\ (\text{θρεπτικές ουσίες}) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overset{*}{a_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ 1 \ \cdots\cdots \ n \end{array}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{θρεπτικές ουσίες}
$$

διαθέτει a_{11} το τη θρεπτική ουσία 1

Γενικά: a_{ij}: πόση θρεπτική ουσία i $(i = 1, \dots, m)$ περιέχει το φαγητό j $(j = 1, \dots, n)$

Ελαχιστοποίηση κόστους

$$\text{Ελαχ. } \underline{c}^T \underline{x}$$

Έστω ότι μια φαρμακευτική εταιρεία παράγει σε κάψουλες αυτές τις θρεπτικες ουσίες και προσπαθεί να πείσει τον διαιτολόγο να τις χρησιμοποιεί αντί του φαγητού. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ είναι η τιμή της καθε κάψουλας. Η φαρμακευτική εταιρία θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος όντας όμως ανταγωνιστική ως προς το φαγητό.

$$(\lambda_1 \ldots \lambda_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{κόστος}$$

$\uparrow$ 1ο φαγητό

$$\text{Μεγ. } \underline{\lambda}^T \underline{b}$$

- **Παράδειγμα 2** (Πρόβλημα μεταφοράς)

Θέλουμε να μεταφέρουμε $a_1, \ldots, a_m$ ποσότητες ενός προϊόντος από m τοποθεσίες σε n προορισμούς όπου θα ληφθούν οι ποσότητες $b_1, \ldots, b_n$

Θέλουμε $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Κόστος ανά μονάδα από το i στο j : c_{ij}

Θέλουμε να προσδιορίσουμε πόσο προϊόν από την πηγή i πρέπει να μεταφερθεί στον προορισμό j (έστω x_{ij}) ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος μεταφοράς, αλλά και να ικανοποιούμε τους περιορισμούς $\underline{a}$ και $\underline{b}$

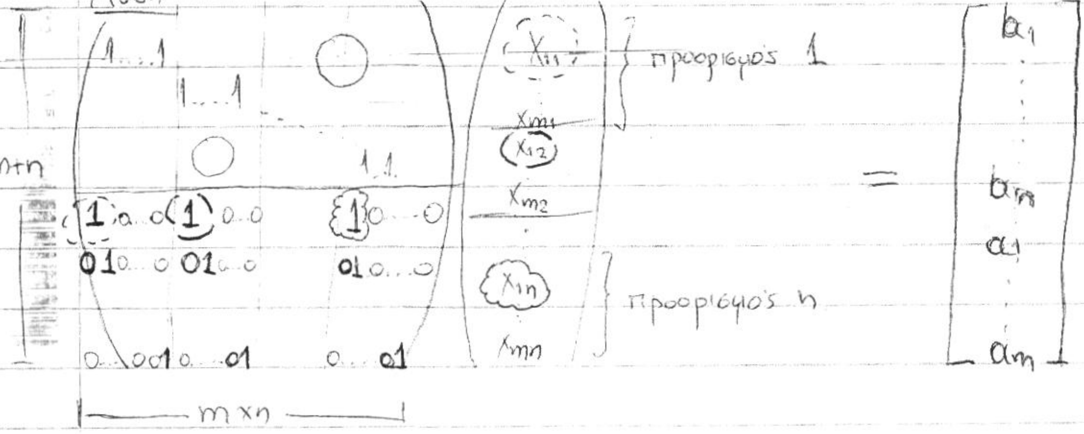
$$\text{Ελαχ. } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{ij}$$

Θα πρέπει $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,\dots,m.$

και

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,\dots,n$$

Λύση



Αντιστοιχουμε μια τιμη κοστους για καθε μεταφορα x_{ij} που δινεται από την τιμη πώλησης στον προορισμο $\mu_1, \ldots, \mu_n$ μειον τη τιμη αγορας στην πηγη $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Ο μεταφορεας για να ειναι ανταγωνιστικος:

ποσο την πουλαει

$$\mu_j - \lambda_i \le c_{ij}$$

ποσο την αγοραζει

Και αναζητά τη μεγιστοποιηση του κερδους.

θα κερδισει οταν πουλησει

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i$$

ποσο ξοδευει οταν αγοραζει