01/10/2012

- Κανονική μορφή του π.γ.π.:

$$\max \underline{c}^T \underline{x} \quad , \quad \underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{M}_{n\times 1}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \quad , \quad A \in \mathbb{M}_{m\times n}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

$$A = (\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_n) \quad , \quad \underline{P}_i \in \mathbb{M}_{m\times 1}$$

Έστω $\underline{x_0}$ μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση, με ακριβώς m θετικές συντεταγμένες.

$$\underline{x}_0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m, 0 — 0) \in \mathbb{M}_{n\times 1}$$

$$B = (\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m) \in \mathbb{M}_{m\times n} \quad \text{βασικός πίνακας}$$

$$\underline{X}_B^0 = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m) \in \mathbb{M}_{m\times 1}$$

$$\underline{c}_B = (c_1, \dots, c_m)$$

$$z_0 := \underline{c}_B^T \, \underline{x}_B^0$$

Οι $\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{m\times 1}$ οπότε:

$$j=1,\dots,n \qquad \underline{P}_j = B\underline{Y}_j \Leftrightarrow \text{ για κάποιο } \underline{Y}_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$$

$$\Leftrightarrow \underline{P}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$$

$$z_j = \underline{c}_B^T \cdot \underline{Y}_j$$

$$A = \left(\underline{P}_1 \; \dots \; \underline{P}_m \,\middle|\, \underline{P}_{m+1} \; \dots \; \underline{P}_j \; \dots \; \underline{P}_n \right) \begin{pmatrix} (x_0)_1 \\ \vdots \\ (x_0)_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

$$e_j = (0 \,\text{—}\, 0, \overset{j}{1}, 0 \,\text{—}\, 0)$$

$$c^T(\underline{x}_0 + \theta e_j) = \underline{c}^T x_0 + \theta c_j$$

αλλά δεν αποτελεί λύση, διότι

$$A(\underline{x}_0 + \theta e_j) = A\underline{x}_0 + \theta e_j = \underline{b} + \theta P_j$$

Αλλά $\underline{P}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underline{P}_i$

$$\underline{x}(\theta) = \begin{pmatrix} (x_0)_1 - \theta x_{1j} \\ \vdots \\ (x_0)_m - \theta x_{mj} \\ 0 \\ \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix}$$

$$A\underline{x}(\theta) = [\,\underline{B} \mid \underline{P}_{m+1} \; \dots \; \underline{P}_j \; \dots \; \underline{P}_n\,] \begin{bmatrix} (x_0)_1 - \theta x_{1j} \\ \vdots \\ (x_0)_m - \theta x_{mj} \\ 0 \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= B\underline{x}^0_B - \theta \sum_{i=1}^{m} \underline{P}_i x_{ij} + \theta P_j \qquad \text{Όμως} \quad \theta \sum_{i=1}^{m} \underline{P}_i x_{ij} = \theta P_j$$

Οπότε $= B\underline{x}^0_B = \underline{b}$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο $\underline{x}(\theta)$:

$$\underline{c}^T \underline{x}(\theta) = \underline{c}^T \underline{x}_0 - \left(\theta \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i - \theta c_j\right)$$

διότι θυμίζουμε $z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$, $\underline{c} = (c_1, \dots c_n)$

$$\underline{c}^T \underline{x}(\theta) = z_0 - \theta\,(z_j - c_j) \quad (\text{Βλ Θεωρ } 1)$$

Θεώρημα 2 Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον $j = 1, \dots, n$ τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση δεν είναι άριστη.

Απόδειξη: Αρκεί να βρούμε μια εφικτή λύση $\underline{x}_1$ καλύτερη από τη x_0. Έστω κάποιο j^* τ.ω. $z_{j^*} - c_{j^*} < 0$. Για $\theta \in \mathbb{R}$ θεωρούμε το σημείο $\underline{x}(\theta)$ με $\underline{c}^T \underline{x}(\theta) = z_0 - \theta(z_{j^*} - c_{j^*}) =$
$= z_0 + \theta\,|z_{j^*} - c_{j^*}|$.
Για να είναι η $\underline{x}(\theta)$ εφικτή λύση:

συνθήκη (*) $\begin{cases} (x_0)_i - \theta x_{ij^*} \geq 0 & \forall i \\ \theta \geq 0 \end{cases}$

1η περίπτωση: Αν $x_{ij^*} \leq 0 \ \forall i$ τότε η (*) ικανοποιείται $\forall \theta \geq 0$

$$\max_{\theta} \underline{c}^T \underline{x}(\theta) = \max_{\theta \geq 0} \left(z_0 + \theta\,|z_j - c_j|\right) = +\infty$$

δηλ. το π.γ.π. είναι μη φραγμένο

2η περίπτωση: Αν $x_{ij^*} > 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, m$ τότε επιλέγουμε θ τέτοιο ώστε $0 < \theta < \theta_0$,

$$\theta_0 = \min\left\{ \frac{(x_0)_i}{x_{ij^*}} : x_{ij^*} > 0 \right\}$$

Επομένως η $\underline{x}(\theta)$ είναι εφικτή λύση και καλύτερη από τη x_0

Έστω $\overset{\text{πίνακας}}{y} = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n) \in M_{m\times n}$

$$\underline{z}^T = (z_1, \dots, z_n), \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$$

B: βασικός πίνακας $= [\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m]$

$$y = B^{-1}A, \quad \underline{z}^T = \underline{c}_B^T \cdot y = \underline{c}_B^T B^{-1} A.$$

Ο πίνακας-κλειδί της μεθόδου είναι ο B (η μάλλον ο B^{-1}). Το μόνο πρόβλημα (που το λύνει ο αλγόριθμος Simplex) είναι η εύρεση του αντίστροφου.

tableau Simplex:
$$\begin{array}{c|c} B^{-1}\underline{b} & B^{-1}A \\ \hline \underline{c}_B^T B^{-1}\underline{b} & \underline{c}_B^T B^{-1}A - \underline{c}^T \end{array}$$

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Για ευκολία έστω ότι ο A περιέχει τον μοναδιαίο $I_{m\times m}$ σαν πρώτη βάση.
$\underline{x}_0 = \underline{b}$, $B^{-1} = I_{m\times m}$

1 Σχηματίζουμε τον πίνακα (tableau Simplex)

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
\underline{b} & \underline{P}_1 \ \dots & \underline{P}_m & \underline{P}_{m+1} & \dots & \underline{P}_n & \underline{\Theta} \\
(x_0)_1 & & & x_{1\,m+1} & \dots & x_{1n} & \text{πιλότος} \\
 & & I_{m\times m} & & x_{ij} & & \\
(x_0)_m & & & x_{m\,m+1} & & x_{mn} & \\
\hline
z_0 & 0 \ \dots & 0 & z_{m+1}-c_{m+1} & \dots & z_n - c_n & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & j_0 & &
\end{array}$$

2. Ελέγχουμε αν η $\underline{x_0}$ είναι αρίστη, εξετάζοντας τις διαφορές $z_k - c_k$ $k = m+1, \dots, n$ (διότι τα προηγούμενα είναι μηδεν. βλ. πίνακα)

α. Αν $z_k - c_k \geq 0 \ \forall k$ τότε η $\underline{x_0}$ είναι αρίστη (Θεωρ 1)

β. Αν $z_j - c_j < 0$ για κάποιο j και $x_{ij} \leq 0$, $\forall i$ τότε το Π.γ.π είναι μη φραγμένο (Θεωρ. 2 περίπτωση 1)

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον j $z_j - c_j < 0$ και ένα τουλάχιστον i $x_{ij} > 0$ ($\forall$ τέτοιο j)

3. Η στήλη P_j : $|z_j - c_j| = \max_k \{|z_k - c_k| \ z_k - c_k < 0\}$

γίνεται βασική στη θέση της

4. P_i : $\dfrac{(x_0)_i}{x_{ij}} = \min_s \left\{ \dfrac{(x_0)_s}{x_{sj}} : x_{sj} > 0 \right\}$

στήλη του πίνακα $\dfrac{\Theta}{(x_0)_i / x_{ij}}$

5. Το στοιχείο x_{ij} λέγεται πιβότος (pivot)