28/09/2012

Έστω η κανονική μορφή του Π.Γ.Π

$$\max \underline{c}^T \cdot \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A = (P_1, \ldots, P_n)$$
$$\underline{x} \geq 0 \qquad \in M_{m \times n}$$

- Ορισμοί: Έστω $r(A) = m \leq n$

1. Βασική λύση: Κάθε λύση $\underline{x}$ που οι μη μηδενικές συντεταγμένες αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A
2. Εφικτή λύση: Μη αρνητικές μεταβλητές $\underline{x}$
3. Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση: Τα προηγούμενα και ακριβώς m θετικές συντεταγμένες

Ερώτημα: Πώς βρίσκουμε μια βασική λύση του Π.Γ.Π

Απάντηση: Διαλέγουμε m γραμμ. ανεξάρτητες στήλες του A, έστω $P_{c_1}, \ldots, P_{c_m}$ και λύνουμε το σύστημα
$$P_{c_1} x_{c_1} + \ldots + P_{c_m} x_{c_m} = b \Leftrightarrow \underbrace{B}_{\text{βασικός πίνακας}} \underline{x} = b$$

$$\text{όπου } \underline{x} \equiv (x_{c_1}, \ldots, x_{c_m}) \Leftrightarrow \underline{x} = B^{-1} b$$

- Παράδειγμα: $P_1 = \binom{1}{2}$, $P_2 = \binom{-1}{1}$, $P_3 = \binom{1}{2}$, $P_4 = \binom{1}{0}$, $\underline{b} = \binom{5}{1}$. Βρείτε $\max(3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4)$

Λύση: - P_1, P_2 είναι γραμμ. ανεξ. δηλ. η μια δεν μπορεί να γραφτεί ως γραμμ. συνδυασμός της άλλης

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$
(Μη εφικτή λύση γιατί μια συντεταγμένη της είναι αρνητική)

- P_1, P_3 είναι γραμμ. εξαρτημένα

- P_1, P_4 γραμμ. ανεξάρτητα

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 5 - \frac{1}{2} > 0 \end{array}$$ → εφικτή λύση

Σημείωση: Εκφυλισμένη βασική λύση υπάρχει όταν το $\underline{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός λιγότερων από m στηλών του A.

π.χ. για $\underline{b} = \binom{2}{4}$

$$- P_1, P_4 \quad \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array}$$

▸ Θεώρημα 1. Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένη τότε το π.γ.π. έχει άριστη λύση.

▸ Θεώρημα 2. Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένη τότε η άριστη λύση πετυχαίνεται σε κορυφή της F

▸ Θεώρημα 3. Η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση $\Leftrightarrow$ (αν και μόνο αν) η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F

Απόδειξη Θεωρήματος 3: "$\Rightarrow$" ευθύ: Η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση
το πολύ m θετικές συντεταγμένες.
έστω $k \leq m$
έστω $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k, -0-)$
Οι στήλες $P_1, \ldots, P_k$ γραμμ. ανεξ.
Έστω ότι η $\underline{x}$ δεν είναι κορυφή
Τότε $\exists\ \underline{x}_1, \underline{x}_2^*$ τ.ω. $\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$,
$0 < \lambda < 1$

* $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ είναι λύσεις του π.γ.π. δηλ. $A\underline{x}_1 = A\underline{x}_2 = b$

πρώτη είσοδος του x_1

$$x_1 = \lambda (x_1)_1 + (1-\lambda)(x_2)_1$$

$$x_k = \lambda (x_1)_k + (1-\lambda)(x_2)_k$$

$$0 = \lambda (x_1)_{k+1} + (1-\lambda)(x_2)_{k+1}$$

$$0 = \lambda (x_1)_n + (1-\lambda)(x_2)_n$$

Όμως $(x_1)_{k+1}, \dots, (x_1)_n$ και $(x_2)_{k+1}, \dots, (x_2)_n = 0$!

οπότε $\underset{i=1,2}{x_i} = \left((x_i)_1, \dots (x_i)_k, \text{—} 0 \text{—} \right)$

Αλλά $\underline{x_1}, \underline{x_2}$ είναι λύσεις οπότε

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \underline{P}_j (x_1)_j &= \underline{b} \\ \sum_{j=1}^{k} \underline{P}_j (x_2)_j &= \underline{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \underline{P}_j \left((x_1)_j - (x_2)_j \right) = 0 \Longrightarrow (x_1)_j = (x_2)_j \Rightarrow \underline{x_1} \equiv \underline{x_2}$$

τα $\underline{P}_j$ $j = 1, \dots, k$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα

"$\Leftarrow$" Αντίστροφα: Έστω ότι η $\underline{x}$ είναι κορυφή της F. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k, \text{—} 0 \text{—})$ & $\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_k$ είναι γραμμ. ανεξ.

Έστω ότι είναι γραμμ. εξαρτημένα δηλ. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{P}_i = 0$ για κάποια λ_i, $i = 1, \dots, k$ όχι όλα μηδέν.

Επίσης αφού $\underline{x} \in F$ ($\underline{x}$ κορυφή της F)

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \underline{P}_i = \underline{b}$$

παίρνω 2 σημεία και θέλω να δείξω ότι εμπεριέχουν το $\underline{x}$. Δηλ. ότι το $\underline{x}$ γράφεται ως γραμμ. συνδυασμός αυτών των δύο σημείων

$$\underline{x}^{\pm}_{\Theta} \equiv \left(x_i \pm \lambda_i \Theta, \text{ για κάποιο } \Theta > 0 \right)_{i=1,\dots,k}$$

είναι λύσεις του Π.γ.Π $\forall\, \Theta > 0$.

$$A\underline{x}^{\pm}_{\Theta} = A\underline{x} \pm A\lambda_i\Theta = \underline{b}$$

Για να είναι εφικτές λύσεις θα πρέπει $\left.\begin{array}{l} x_i + \lambda_i\Theta > 0 \\ x_i - \lambda_i\Theta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\Theta\lambda_i| \le x_i$

διαλέγουμε $|\Theta| \le \dfrac{x_i}{|\lambda_i|}$. Οπότε για Θ αρκετά μικρό έχουμε

$\underline{x}_1 = \underline{x} + \lambda\Theta$

$\underline{x}_2 = \underline{x} - \lambda\Theta$

τ.ω. $\frac{1}{2}\underline{x}_1 + \frac{1}{2}\underline{x}_2 = \underline{x}$ άρα το $\underline{x}$

δεν μπορεί να είναι κορυφή. $\blacksquare$

Η μέθοδος Simplex (εύρεση της άριστης λύσης ενός Π.γ.Π)

Ιδέα: από μια κορυφή $\underline{x}_0$ πηγαίνουμε σε μια καλύτερη $\underline{x}_1$

Χρειαζόμαστε i) το Π.γ.Π να είναι σε κανονική μορφή

ii) να είναι γνωστή μια αρχική μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$

Έστω $\underline{x}_0$ μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση (έχει ακριβώς $m = r(A)$ θετικές συντεταγμένες και τα αντίστοιχα $P_1, \dots, P_m$ είναι γραμμ. ανεξ.)

$\underline{x_0} = ((x_0)_1, \ldots, (x_0)_m, \text{—— } 0 \text{ ——})$

$$\sum_{i=1}^{m} (x_0)_i \underline{P_i} = \underline{b} \qquad ①$$

Εστω $z_0 \overset{\text{εξ' ορισμου}}{:=} \sum_{i=1}^{m} (x_0)_i c_i$

Καθε στηλη του πινακα A ειναι γραμ. συνδυασμος των $P_1, \ldots, P_m$

$$\underline{P_j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underline{P_i} \quad \text{για καποια } x_{ij}$$

Έστω $z_j := \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$

Χρειαζομαστε ενα κριτηριο για να αποφασιζουμε αν η δεδομενη βασικη εφικτη λυση ειναι αριστη ή όχι.

Θεώρημα 1: Αν $z_j - c_j \geq 0$, $\forall j$ τοτε η μη εκφυλισμενη βασικη εφικτη λυση x_0 ειναι αριστη

Αποδειξη: Έστω $y_0 = ((y_0)_1, \ldots, (y_0)_n)$ τυχαια εφικτη λυση. Αρκει να δειξουμε ότι

$$z_0 = \underline{c}^T \underline{x_0} \geq \underline{c}^T \underline{y_0} =: z_0^*$$

Εφόσον η $\underline{y_0}$ ειναι λυση: $\sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \underline{P_j} = \underline{b} \iff$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underline{P_i} = \underline{b} \iff \sum_{i=1}^{m} \underline{P_i} \sum_{j=1}^{n} (y_0)_j x_{ij} = \underline{b} \Bigg\} \Rightarrow$$

συγκρινοντας με την ①

$$\Rightarrow (X_0)_i = \sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \, x_{ij} \qquad (2)$$

$$\text{Οπότε} \quad z_0 = \sum_{i=1}^{m} (x_0)_i \, c_i \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \, x_{ij} \right) c_i =$$

θα πρέπει $y_0 \geq 0$ για να ισχύει

$$= \sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \, c_i}_{z_j} \geq \sum_{j=1}^{n} (y_0)_j \, c_j = z_0^*$$

- Θεώρημα 2. Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underline{x}_0$ δεν είναι άριστη.

Πόρισμα. Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j και η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο, τότε υπάρχει εφικτή λύση $\underline{x}_1$ καλύτερη από τη $\underline{x}_0$