26/09/2012

Παρασκευή 11-1

- Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε τη γενική μορφή π.γ.π. (προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού)

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \underline{c}^T \cdot \underline{x}$

$$\begin{cases} \min \max f(\underline{x}) \\ A\underline{x} \lesseqgtr \underline{b}, \quad A \in M_{m \times n} \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Θα ονομάζουμε F το σύνολο των περιορισμών (εφικτή περιοχή) και θα λέμε άριστη ή βέλτιστη λύση $\underline{x}^* \in F$

$f(\underline{x}^*) = \max \{ f(x), x \in F \}$

▷ Ορισμός: Ένα **π.γ.π.** είναι σε <u>κανονική μορφή</u> αν δίνεται από

$$\begin{aligned} &\max \underline{c}^T \underline{x} \\ &A\underline{x} = \underline{b} \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα.

$$\begin{aligned} &\min (x_1 + 2x_2 + x_3) && (1)\\ &x_1 + 2x_2 \leq 40 && (2)\\ &x_1 - x_2 + x_3 = 30 && (3)\\ &x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -50 && (4)\\ &x_2 + x_3 \geq 25 && (5)\\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

i) ελάχιστο / μέγιστο

$g(x) := -f(x)$

ii) αρνητικοί σταθεροί όροι σε περιορισμούς (βλ. (4) ...)

⇒ πολ/με με (-1). Οπότε $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50 \quad (4)$

iii) περιορισμοί εκφραζόμενοι με ανισότητες: εισαγωγή νέων θετικών "περιθώριων μεταβλητών" (slack variables)

δηλ: (2) $x_4 \geq 0$

(4) $x_5 \geq 0$

(5) $x_6 \geq 0$.

iv) Μη θετικές μεταβλητές (στο παράδειγμα μας η x_3)

$$x_3 = x_3' - x_3'' \ , \quad x_3', x_3'' \geq 0$$

(διότι ένας αρνητικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως η διαφορά δυο θετικών αριθμών)

Οπότε $-\max\left(-x_1-2x_2-(x_3'-x_3'')\right)$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad + x_4 &= 40 \\
x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' \qquad\qquad &= 30 \\
-x_1 + 3x_2 + 2(x_3' - x_3'') \quad + x_5 &= 50 \\
x_2 + x_3' - x_3'' \qquad\qquad - x_6 &= 25
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

[αφαιρούμε το x_6 γιατί αρχικά είχα $\geq$ και για να το κάνουμε $=$ πρέπει να αφαιρέσουμε κάποιο θετικό αριθμό]

• Ορισμός: Βαθμός $r(A)$ του πίνακα $A \in M_{m \times n}$ είναι ο αριθμός των γραμμικών ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του Δηλ:

$$r(A) = r(A^T) \leq \min(m, n)$$

π χ

Έστω $r(A) = m < n$, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$

$\boxed{\text{Θεώρημα Weierstrass}}$: Αν το F είναι μη κενό <u>συμπαγές</u> υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και η συνάρτηση $f: F \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $x^* \in F$ τ.ω. $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x})$, $\forall\, \underline{x} \in F$

· <u>Θεώρημα 1</u>

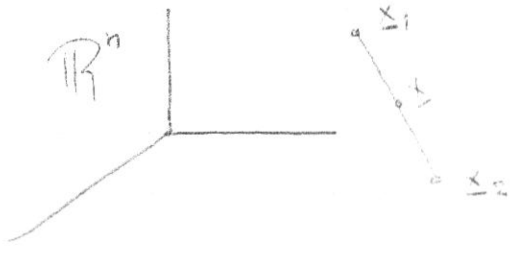
Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε το Π.Γ.Π. έχει αρίστη λύση.

<u>Απόδειξη:</u>

- Έχω $f(x) = c^T x$ συνεχής συνάρτηση επειδή είναι γραμμική
- Κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ συμπαγές. $\left(\begin{matrix} x_n \to x \\ Ax_n \to Ax \end{matrix} \right)$

Ορισμοί:

1 Κυρτός συνδυασμός των σημείων $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθε σημείο $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

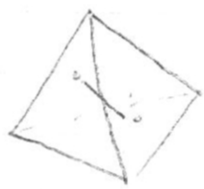


2 Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall\ \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in K$
$\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2 \in K, \ \forall\ 0<\lambda<1$

3. Ακρότατο σημείο: Όταν δεν υπάρχουν $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ όπως στον ορισμό 2

4 Κυρτό πολύεδρο P είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$

$$P = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{x}_i ,\ \lambda_i \geq 0 ,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

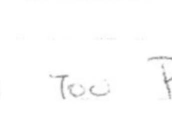


αν πάρουμε ένα σημείο στη μια πλευρά της πυραμίδας και ένα άλλο σημείο σε μια άλλη πλευρά για να τις ενώσω με μια ευθεία θα περιέχονται σημεία στο εσωτερικό της πυραμίδας

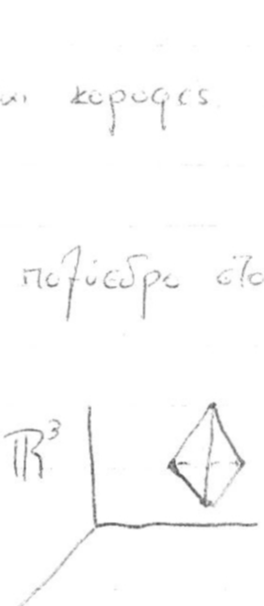
5 Τα ακρότατα του P λέγονται κορυφές

6. Simplex λέγεται κάθε κυρτό πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ με ακριβώς n+1 κορυφές

π.χ. $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



7. Υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$: $\{ \underline{x} = (\underline{x}_1, \dots \underline{x}_n) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \}$

$\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}$

- Θεώρημα: Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο

Απόδειξη

Έστω $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in F$

$\underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2 \in F$ γιατί

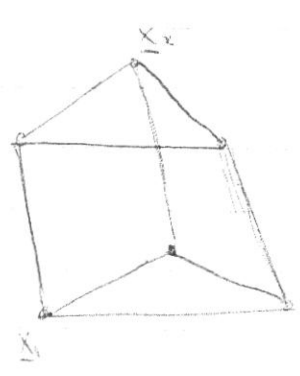
$$A\underline{x} = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda) A x_2 = \lambda b + (1-\lambda) b = b$$

Σημείωση: & αν είναι φραγμένο σύνολο τότε είναι κυρτό πολύεδρο.

- Θεώρημα 2: Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο τότε η άριστη λύση πετυχαίνεται σε κορυφή της F

Απόδειξη

Η F είναι φραγμένο σύνολο $\Rightarrow$ το π.γ.π. έχει άριστη λύση (έστω x^*) και αφού η F αποτελεί ένα κυρτό πολύεδρο έχει πεπερασμένο αριθμό κορυφών, έστω $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ οι κορυφές



Τότε

$$\underline{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

$$\lambda_i > 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

γραμμικός συνδυασμός των κορυφών

$$f(\underline{x}^*) = \underline{c}^T x^* = \underline{c}^T \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{c}^T \underline{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \max_{i=1,\dots,k} f(x_i) \leq f(x^*)$$

■

Σημείωση: Αν δύο ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι άριστη λύση.

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε αλγεβρικά τις κορυφές;

- Ορισμός: Βασική λύση του προβλήματος γ.π. λέγεται κάθε λύση που οι μη μηδενικές συντεταγμένες της αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα A. Στην περίπτωση $r(A)=m<n$, κάθε βασική λύση έχει το πολύ m μη μηδενικές συντεταγμένες.

- Θεώρημα: Η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση αν και μόνο αν το σημείο $\underline{x}$ είναι κορυφή της εφικτής περιοχής (F).