

Εφαρμοσμένα μαθηματικά

- a. Επίλυση προβλημάτων
- b. κατανόηση της μαθηματικής δομής του προβλήματος
→ γενίκευση.

Τραμ Προγραμματισμός εντάσσεται στην κατηγορία των προβλημάτων βελτιστοποίησης

- Ιστορική αναδρομή:

- Fourier,
- L.V. Kantorovich 1939
(Mathematical methods in the organization and planning of production)
- G.B. Dantzig 1947: simplex method.
- John von Neumann: δuality (duality) => Θεωρία Παγνίων

- Bibliography:
1. Linear programming and extensions
G. B. Dantzig 1963
 2. L.P. 1 Introduction.
Dantzig, Thapa, Springer.
 3. L.P. 2 Theory and extensions.
 4. Introduction to linear and non linear programming.
 5. Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα.
Φακίνοϊς οικονομίου.

► Παράδειγμα 1: Γεωργός με L στρέγματα διαθέτει F κιλά λιπάσμα και Π κιλά φυτοφαρμάκα και θέλει να καλλιεργήσει σιτάρι και βρώμη. Κάθε στρέγμα σιταριού απαιτεί f_1 κιλά λιπάσμα και π_1 κιλά φυτοφαρμάκα. Αντίστοιχα f_2, π_2 για τη βρώμη. Έστω S_1, S_2 οι τιμές σιταριού/βρώμης ανά στρέγμα.

Αρχικό πρόβλημα: μεγιστοποίηση κέρδους

- Λύση:
- 1 Μεταβλητές απόφασης (decision variables)
 x_1, x_2 στρέγματα σιταριού/βρώμης
 - 2 Αντικειμενική συνάρτηση (Objective function)
 $S_1 x_1 + S_2 x_2$
 - 3 Περιορισμοί:
 - 1 $x_1 + x_2 \leq L$
 - 2 $f_1 x_1 + f_2 x_2 \leq F$
 - 3 $\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 \leq \Pi$
 - 4 $x_1, x_2 \geq 0$

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{c}^T \cdot \underline{x}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

Περιορισμοί:

ο διανυσμα = 0 (μηδέν)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f_1 & f_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ F \\ \Pi \end{bmatrix}$$

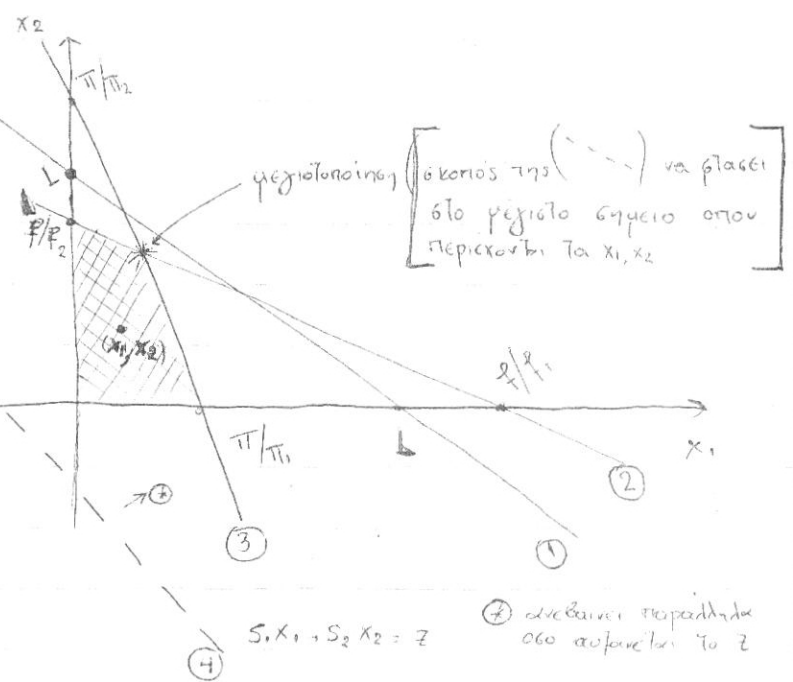
$\underbrace{\hspace{100px}}_A$
 $\underbrace{\hspace{100px}}_b$

Αρχικό πρόβλημα: μεγιστοποίηση $c^T \cdot x$
 υπό την προϋπόθεση $Ax \leq b$
 $x \geq 0$ } Π.1

Αντικειμενική επίλυση:

για $x_1=0$ από $f_1 x_1 + f_2 x_2 = f \Rightarrow x_2 = f/f_2$
 $x_2=0 \Rightarrow x_1 = f/f_1$

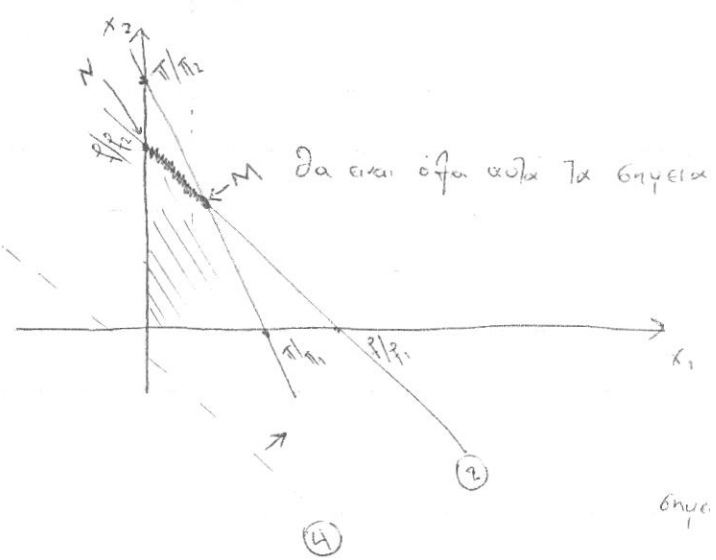
Ομοίως για π_1/π_2
 και έτσι γίνεται η γραμ. παραστάση



Έστω $S_1 x_1 + S_2 x_2 = Z$

Σημειώσεις: 1. Τι συμβαίνει όταν η κλίση της 4 συμπίπτει με την κλίση της ②?

Απ. Οι τιμές (x_1, x_2) που μεγιστοποιούν τη αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμ. συνδυασμός των τιμών M & N



δηλ. ως: ② // ④

► Ερώτηση: Μπορεί η μεγιστοποίηση του κέρδους να επιτευχθεί με τη μείωση του κόστους των μέσων παραγωγής;

$$\underline{0} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ f_1 & f_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} L \\ f \\ \pi \end{bmatrix}}_b \quad \text{Πρόβλημα 1}$$

ή αλλιώς $\underbrace{[s_1 \ s_2]}_{\leq} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Εστω: γ_L το κόστος της γης/ανά στρέμμα.
 γ_f το κόστος του φάσματος/ανά στρέμμα.
 γ_π το κόστος των φοροαπαλλαγών/ανά στρέμμα.

ελαχιστοποίηση: $L\gamma_L + f\gamma_f + \pi\gamma_\pi$ (αντικειμ. συνάρτηση)

υπό τις προϋποθέσεις: $\gamma_L + f_1\gamma_f + \pi_1\gamma_\pi \geq s_1$

$\gamma_L + f_2\gamma_f + \pi_2\gamma_\pi \geq s_2$

εξ. $\underline{b}^T \cdot \underline{y}$, $\underline{y} = (\gamma_L, \gamma_f, \gamma_\pi)^T$ } Πρόβλημα 2
 υπό τις προϋποθέσεις $A^T \cdot \underline{y} \geq \underline{\leq}$ } (δύο πρόβλημα)

Παρατήρηση

$$\underline{b}^T \underline{y} \stackrel{?}{\geq} \underline{c}^T \underline{x} \quad \text{ex (1)}$$

Θεώρημα αδρανούς δούλου: Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δούλου προβλήματος 2 σε κάθε δυνατή λύση είναι \geq της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού προβλήματος 1

Απόδειξη: Έχουμε: $A \underline{x} \leq \underline{b}$ ① και ② $A^T \underline{y} \geq \underline{c}$

Θέλω να αποδείξω ex (1)

Έχω: ① $A \underline{x} \leq \underline{b} \Rightarrow \underline{y}^T A \underline{x} \leq \underline{y}^T \underline{b}$

Προσοχή $A^T \underline{y} = \underline{y}^T A$. Οπότε ② $\underline{y}^T A \underline{x} \geq \underline{c}^T \underline{x}$

Απο ①, ② $\Rightarrow \underline{y}^T \underline{b} \stackrel{①}{\geq} \underline{y}^T A \underline{x} \stackrel{②}{\geq} \underline{c}^T \underline{x}$