$$\alpha = \min\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| : z_j - c_j > 0,\ x_{ij} < 0\right\}$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha, b\}$$

$$b = \max\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| : z_j - c_j < 0,\ x_{ij} > 0\right\}$$

Φάση ΙΙ

Αν $\exists\, b_i < 0$ η βασική στήλη που αντιστοιχεί στην i-γραμμή φεύγει.

Παρασκευή 2/11/2012.

Ανακεφαλαίωση

Το δυϊκό πρόβλημα

$$(1)\begin{cases} \max\ \underline{c}^T \underline{x} & \underline{x} \in M_{n\times 1} \\ A\underline{x} \leq b & A \in M_{m\times n}. \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \min\ \underline{\lambda}^T \underline{b} & \underline{\lambda} \in M_{m\times 1} \\ \underline{\lambda}^T A \geq \underline{c} \\ \underline{\lambda} \geq 0. \end{cases}$$

Θεωρήματα

1. Το δυϊκό του (2) είναι το (1).
2. Αν $\underline{x}, \underline{\lambda}$ είναι εφικτές λύσεις των (1) κ' (2) τότε $\underline{c}^T\underline{x} \leq \underline{\lambda}^T \underline{b}$
3. Αν $\underline{x}, \underline{\lambda}$ εφικτές κ' $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{\lambda}^T\underline{b}$ τότε είναι άριστες.
4. (i) Αν το (1) έχει άριστη λύση, τότε κ' το (2) έχει άριστη λύση
   (ii) Αν το (1) είναι μη φραγμένο τότε το (2) δεν έχει εφικτές λύσεις

Σημειώσεις

1. Αν στην άριστη λύση του (1) γνωρίζουμε ποιες μεταβλητές είναι βασικές τότε η λύση του (2) δίνεται από $\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B^T B^{-1}$.

π.χ.

$$
\begin{cases}
\max(-x_1 - x_2 + x_3) \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\
-x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 2 \\
7x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\
4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 6 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

$$
A = [\tilde{A} \mid I] \quad ; \quad \tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \\ \underline{P}_1 \quad \underline{P}_2 \quad \underline{P}_3 \end{array} , \quad I_{4\times4}
$$

Τελική μορφή του πίνακα simplex

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_4		3							
P_3		1			e_2	e_1		e_3	e_4
P_6		11							
P_7		8							
			1	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0

← λύση του δυικού.

↑ άριστη λύση

$$
\begin{array}{c|c}
B^{-1}\underline{b} & B^{-1}A \\
\hline
\underline{c}_B^T B^{-1} \underline{b} & \underline{c}_B^T B^{-1} A - \underline{c}^T
\end{array}
$$

[illegible] $\lambda^T = c^T B^{-1}$

Λύση του αρχικού $= (0, 0, 1, 3, 0, 11, 8)$
Λύση του δυϊκού $= (0, \frac{1}{2}, 0, 0)$

Τα στοιχεία της λύσης του δυϊκού "αντιστοιχούν" στις στήλες που αρχικά ήταν βασικές στον πίνακα simplex του αρχικού.

2. Γεωμετρική κ' οικονομική ερμηνεία.

3. Έστω $\underline{x}, \underline{\lambda}$ εφικτές λύσεις των (1) κ' (2).
Ικανή κ' αναγκαία συνθήκη για βέλτιστες λύσεις είναι:
i) $x_i > 0 \Rightarrow \underline{\lambda}^T \underline{P}_i = c_i$
ii) $\lambda^T \underline{P}_i > c_i \Rightarrow x_i = 0$

Υπενθύμιση
$(\underline{\lambda}^T A - \underline{c}^T)\underline{x} = 0$ για άριστες λύσεις.

π.χ.

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
			-1	-1	1	0	0	0	0 ← $\underline{c}$
P_4	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
P_3	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
P_6	0	11	$\frac{13}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
P_7	0	8	3	13	0	0	1	0	1
			1	$\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0 ← $\underline{\lambda}$

← τελικός πίνακας simplex.

$$A = \left[\begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} I_{4\times4} \end{pmatrix}\right]$$

Γενικά: $\underline{\lambda}^T (P_1\ P_2\ P_3\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4) \geq \underline{c}^T$

εδώ ισχύει το (i)

$P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \lambda^T = (0, \frac{1}{2}, 0, 0) \quad \lambda^T \cdot P_3 = 1 = c_1$ ✓

Π.χ.

$$\begin{cases} \max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

έστω $\hat{\underline{x}} = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right)$ άριστη λύση (>0)

Να βρεθεί η λύση του δυϊκού.

Το δυϊκό πρόβλημα: $\begin{cases} \min\left(\underline{\lambda}^T \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ \underline{\lambda}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \geq (2, -3, 1, 2) \end{cases}$

Χρησιμοποιώντας το (i) έχουμε:

$\underline{\lambda}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \quad , \underline{\lambda}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \quad , \underline{\lambda}^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2.$

οπότε βρίσκουμε το $\underline{\lambda}$

4. Το πρόβλημα της ευαισθησίας.

$$\begin{cases} \max(\underline{c}^T \underline{x}) \\ A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases}$$

i) Μεταβολή των $\underline{c}$: ($\hat{\underline{c}}$ η νέες τιμές)
Επηρεάζεται μόνο η τελευταία γραμμή κι
αν $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0 \ \forall j$ τότε η προηγούμενη λύση παραμένει άριστη
αλλιώς συνεχίζουμε με τον αλγόριθμο simplex.

ii) Μεταβολή των b: ($\hat{\underline{b}} = \underline{b} + \delta \underline{b}$)
Αν έχουμε κάποια είσοδο αρνητική, συνεχίζουμε με τη Φάση II του δυϊκού αλγορίθμου simplex.
Η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\hat{z} = z + \delta z = z + \underline{c}_B^T \delta \underline{x}_B$$

$$\hat{x}_B = \underline{x}_B + \delta \underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} + B^{-1}\delta \underline{b}$$

$$\Rightarrow \hat{z} = z + \underbrace{\underline{c}_B^T B^{-1}}_{\underline{\lambda}} \delta \underline{b}$$

iii) Μεταβολή του A:

$$\begin{array}{c|cc} & P_1 \ldots P_n & \\ b & \tilde{A} & I \\ \hline & \hat{P}_1 \ldots \hat{P}_n & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc} & y_1 \ldots\ldots y_n & \\ B^{-1}b & B^{-1}\tilde{A} & B^{-1} \\ \hline & \hat{y}_1 \ldots\ldots \hat{y}_n & \end{array}$$

α) Αν οι μεταβολές στον A δεν αφορούν τις βασικές στήλες
της άριστης λύσης τότε η B (βάση) είναι αμετάβλητη.
Για τις υπόλοιπες στήλες έχουμε:

$$\hat{y}_j = B^{-1}\hat{P}_j$$

όπου $\hat{\underline{P}}$ η νέα τιμή του A κ' υπολογίζουμε $\hat{z}_j - c_j$ κ' αν είναι κάποιο αρνητικό συνεχίζουμε με simplex. έως όσου γίναν θετικά.

β) Αν οι μεταβολές αφορούν κ' βασικές στήλες της άριστης λύσης, τότε ο B μεταβάλλεται κ' επομένως μεταβάλλονται κ' όλες οι στήλες του τελικού πίνακα.

Δείτε αναφορά [1]