Πως βρίσκουμε την άριστη λύση του δυϊκού:

Θέτω $w_2 - w_3 = w_4$

συνεπώς έχω: $\begin{cases} \min(-3w_1 + 4w_4) \\ w_4 \geq 1 \\ 3w_1 + 5w_4 \geq 1 \\ -2w_1 + 2w_4 \geq 1 \\ w_1, w_4 \geq 0. \end{cases}$

Αν $\hat{w}$ άριστη λύση, τότε $\hat{w}_4 = 1$

- $3\hat{w}_1 + 5\hat{w}_4 = 1 \Rightarrow \hat{w}_1 = -4/3 < 0$ απορρίπτεται.
- $-2\hat{w}_1 + 2\hat{w}_4 = 1 \Rightarrow \hat{w}_1 = \frac{1}{2} > 0$ δεκτή.

Οπότε, $w^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$

$\min(b^T w^*) = \left(-3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1\right) = \frac{-3+8}{2} = \frac{5}{2}$.

Άρα, παρατηρώ ότι $\min b^T \hat{w} = \max c^T \hat{x}$.

Τετάρτη 31/10/2012

Άσκηση

$$\begin{cases} \min(2x_1 - 4x_2 + 6x_3) \\ x_1 - x_2 = 10 - x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 + x_3 \geq -1 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_4 \leq 4 \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\max(-2x_1 + 4x_2 - 6x_3) \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_4 + x_6 = 8 \\ x_1, \ldots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-2	2	1	-2	1	0	0	-1	
P_5	0	1	0	2	1	0	1	0	
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	
		-4	0	0	0	0	0	4	

P_2 μη βασική, άρα έχω απειρία λύσεων.

$A' : \hat{x} = (2,0,0,4,1,0)^T$

$B' : x^* = (3, \frac{1}{2}, 0,0,0,0)^T$

1. Αλλαγή $\underline{c}$: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$. Τότε

B	C_B	b	P_1 (1)	P_2 (-1)	P_3 (2)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (0)	θ
P_1	1	2	1	-2	1	0	0	-1	2
P_5	0	1	0	2	$\boxed{1}$	0	1	0	1
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	–
		2	0	-1	-1	0	0	-1	

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	1	1	1	-4	0	0	-1	-1	–
P_3	2	1	0	2	1	0	1	0	–
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	8
		3	0	1	0	0	1	-1	

$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_2'$

$\Gamma_2' = \Gamma_2$

$\Gamma_3' = \Gamma_3$

$\Gamma_4' = \Gamma_4 + \Gamma_2'$

B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	1	9							
P_3	2	1							
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	
		11	0	2	0	2	1	0	

$\Gamma_1'' = \Gamma_1' + \Gamma_3''$

$\Gamma_2'' = \Gamma_2'$

$\Gamma_3'' = 2\Gamma_3'$

$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + \Gamma_3''$

$I_{3\times3} = [P_1 \vdots P_5 \vdots P_6]$

(Από simplex βρίσκω $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ πριν το ερώτημα 1 δηλ. πριν αλλάξω το $\underline{c}$)

2. Αλλάζω το $\underline{b}$: $b_1 = 5$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$

Τότε $\hat{y}_0 = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Άσκηση

Επιλύστε με δυϊκό simplex το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \max (4x_1 + 6x_2) \\ 12x_1 + 6x_2 \le 360 \\ 8x_1 + 10x_2 \le 400 \\ -10x_1 - 4x_2 \le -200 \\ -4x_1 - 8x_2 \le -200 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max (4x_1 + 6x_2) \\ 12x_1 + 6x_2 + x_3 = 360 \\ 8x_1 + 10x_2 + x_4 = 400 \\ -10x_1 - 4x_2 + x_5 = -200 \\ -4x_1 - 8x_2 + x_6 = -200 \\ x_1, \dots, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

<u>Φάση I</u>

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	360	12	6	1	0	0	0	
P_4	0	400	8	10	0	1	0	0	←
P_5	0	-200	-10	-4	0	0	1	0	
P_6	0	-200	-4	-8	0	0	0	1	
		0	-4	-6	0	0	0	0	(≤ 0)
				↑					

$z_j - c_j > 0 \longrightarrow$ Φάση II.

$$z_j - c_j < 0 \begin{cases} \nearrow x_{ij} < 0, \ \forall i \\ \searrow x_{ij} > 0, \ \exists i \end{cases}$$

$$\alpha = \min \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right|, \ z_j - c_j > 0, \ x_{ij} < 0 \right\}$$

$$b = \max \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{x_{ij}} \right|, \ z_j - c_j < 0, \ x_{ij} > 0 \right\}$$

$\Rightarrow \min\{\alpha, b\}$

$$b = \max \left\{ \frac{6}{10}, \frac{4}{8} \right\} = \frac{6}{10}$$

Θα φύγει μία από τις στήλες P_3, P_4, έστω P_4
επειδή οι P_5, P_6 έχουν αρνητικά x_{ij}
Στη θέση της P_4 θα μπει η P_1 ή η P_2
Από το κριτήριο προκύπτει η P_2.

B	C_B	b	P_1 ↓	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		
P_3	0	120	$\frac{36}{5}$	0	1	$-\frac{6}{10}$	0	0		$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 6\Gamma_2$
P_2	6	40	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	0		$\Gamma_2' = \Gamma_2/10$
P_5	0	-40	$-\frac{34}{5}$	0	0	$\frac{4}{10}$	1	0	←	$\Gamma_3' = \Gamma_3 + 4\Gamma_2'$
P_6	0	120	$\frac{12}{5}$	0	0	$\frac{8}{10}$	0	1		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 8\Gamma_2'$

Φάση ΙΙ

$$z_j - c_j \geq 0 \rightarrow \bar{b} = x_{i0} > 0$$

Παρατηρώ ότι στη P_5 αντιστοιχούν αρνητικά x_{ij} οπότε η P_5 θα φύγει

$$\alpha = \min\left\{\frac{4/5}{34/5}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{34}.$$

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	$\frac{1320}{17}$							$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{36}{5}\Gamma_3''$
P_2	6	$\frac{600}{17}$							$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{8}{10}\Gamma_3''$
P_1	4	$\frac{100}{17}$	1	0	0	$-\frac{1}{17}$	$-\frac{5}{34}$	0	$\Gamma_3'' = -\frac{5}{4}\Gamma_3'$
P_6	0	$\frac{1800}{17}$							$\Gamma_4'' = \Gamma_4' - \frac{24}{10}\Gamma_3''$
		$\frac{4000}{17}$	0	0	0	$\frac{11}{17}$	$\frac{2}{17}$	0	(≥ 0) $\Gamma_5'' = \Gamma_5' - \frac{4}{5}\Gamma_3''$

Άρα $x^* = \left(\frac{100}{17}, \frac{600}{17}, \frac{1320}{17}, 0, 0, \frac{1800}{17}\right)$

κ' $\max(f(x^*)) = \frac{4000}{17}$

Θεωρία

Φάση Ι

1. $z_j - c_j > 0 \Rightarrow$ Φάση ΙΙ

2. $z_j - c_j < 0$
   - $\rightarrow x_{ij} < 0$, $\forall i$ τότε το ΠΓΠ δεν έχει λύση
   - $\rightarrow x_{ij} > 0$, για κάποιο i, τότε η βασική στήλη που αντιστοιχεί στη γραμμή i φεύγει.

Για τη στήλη που θα γίνει βασική στη θέση αυτής που έφυγε χρησιμοποιώ το κριτήριο

$$\alpha = \min\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| : z_j - c_j > 0,\ x_{ij} < 0\right\}$$

$$\Rightarrow \min\{\alpha, b\}$$

$$b = \max\left\{\left|\frac{z_j - c_j}{x_{ij}}\right| : z_j - c_j < 0,\ x_{ij} > 0\right\}$$

Φάση II

Αν $\exists\ b_i < 0$ η βασική στήλη που αντιστοιχεί στην i-γραμμή φεύγει.

Παρασκευή 2/11/2012.

Ανακεφαλαίωση

Το δυϊκό πρόβλημα

$$(1)\begin{cases} \max\ \underline{c}^T\underline{x} & \underline{x} \in M_{n\times 1} \\ A\underline{x} \le b & A \in M_{m\times n} \\ \underline{x} \ge 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \min\ \underline{\lambda}^T\underline{b} & \underline{\lambda} \in M_{m\times 1} \\ \underline{\lambda}^T A \ge \underline{c} \\ \underline{\lambda} \ge 0. \end{cases}$$

Θεωρήματα

1. Το δυϊκό του (2) είναι το (1).
2. Αν $\underline{x}, \underline{\lambda}$ είναι εφικτές λύσεις των (1) κ' (2) τότε $\underline{c}^T\underline{x} \le \underline{\lambda}^T\underline{b}$
3. Αν $\underline{x}, \underline{\lambda}$ εφικτές κ' $\underline{c}^T\underline{x} = \underline{\lambda}^T\underline{b}$ τότε είναι άριστες.
4. (i) Αν το (1) έχει άριστη λύση, τότε κ' το (2) έχει άριστη λύση
   (ii) Αν το (1) είναι μη φραγμένο τότε το (2) δεν έχει εφικτές λύσεις