Δευτέρα 29/10/2012.

Μη φραγμένο simplex

Άσκηση

$$\begin{cases} \min(x_1 - 3x_2 + 4x_3) \\ -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \le 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -\max(-x_1 + 3x_2 - 4x_3) \\ -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0. \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \underline{P_1} & \underline{P_2} & \underline{P_3} & \underline{P_4} & \underline{P_5} & \underline{P_6} \end{array} \end{array} \qquad I_{2\times 2} = (P_5 \,\vdots\, P_6) \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_{i0} \quad (0,0,0,0,1,2)^T$$

			-1	3	-4	0	0	0			
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ		
P_5	0	1	-7	$\boxed{1}$	3	-1	1	0	1	←	Γ_1
P_6	0	2	-2	2	3	1	0	1	1		Γ_2
		0	1	-3	4	0	0	0			Γ_3
				↑							

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ		
P_2	3	1	-7	1	3	-1	1	0			$\Gamma_1' = \Gamma_1$
P_6	0	0	$\boxed{12}$	0	-3	3	-2	1		←	$\Gamma_2' = \Gamma_2 - 2\Gamma_1'$
		3	-20	0	13	-3	3	0			$\Gamma_3' = \Gamma_3 + 3\Gamma_1'$
			↑								

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_2	3	1	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		$\Gamma_1'' = \Gamma_1' + 7\Gamma_2''$
P_1	-1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		$\Gamma_2'' = \frac{\Gamma_2'}{12}$
		3	0	0	8	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$		$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + 20\Gamma_2''$

Αν $z_k - c_k < 0$ κι $x_{ij} < 0$, $\forall i$

Τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο. Άρα δεν έχει λύση

Συνεπώς $-\max c^T x^* = 3$

$x^* = (0,1,0,0,0,0)^T$, $-\max(3\cdot 1) = 3 \Rightarrow \min c^T x^* = 3$

Αυτό θα ίσχυε αν το π.γ.π. είχε λύση (πως πάμε από το max στο min)

Άσκηση (Μ-μέθοδος / τεχνητές μεταβλητές / τροποποιημένη simplex)

$$\begin{cases} \min(2x_1 - x_2 + 3x_3) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 \\ -x_1 + 5x_2 \le 1 \\ -x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\max(-2x_1 + x_2 - 3x_3 + M x_8) \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 1 \\ -x_2 + 4x_3 - x_6 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, \dots, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M < 0$, $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \le -1$.

$x_{io} = (0,0,0,9,1,0,1,1)^T$

$I_{4x4} = [P_4 \; P_5 \; P_8 \; P_7]$

			-2	1	-3	0	0	0	0	M		
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ	
P_4	0	9	-1	2	3	1	0	0	0	0	3	Γ_1
P_5	0	1	-1	5	0	0	1	0	0	0	—	Γ_2
P_8	M	1	0	-1	$\boxed{4}$	0	0	-1	0	1	$\frac{1}{4}$	← Γ_3
P_7	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	Γ_4
		M	2	-M-1	4M+3	0	0	-M	0	0		Γ_5
			≥0		≤-1			>0				
					↑							

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ
P_4	0	$\frac{33}{4}$	−1	$\frac{11}{4}$	0	1	0	$\frac{3}{4}$	0		3
P_5	0	1	−1	$\boxed{5}$	0	0	1	0	0		$\frac{1}{5}$
P_3	−3	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	0		—
P_7	0	$\frac{11}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1		$\frac{11}{5}$
		$-\frac{3}{4}$	2	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0		

από δω κ' πέρα δεν την υπολογίζω αφού "έφυγε" από τη βάση B

$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 3\Gamma_3'$
$\Gamma_2' = \Gamma_2$
$\Gamma_3' = \Gamma_3/4$
$\Gamma_4' = \Gamma_4 - \Gamma_3'$
$\Gamma_5' = \Gamma_5 - (4M+3)\Gamma_3'$

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	$\frac{154}{20}$								
P_2	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	
P_3	−3	$\frac{3}{10}$								
P_7	0	$\frac{10}{4}$								
		$-\frac{14}{20}$	$\frac{39}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{4}$	0	

$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{11}{4}\Gamma_2''$
$\Gamma_2'' = \Gamma_2'/5$
$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \frac{1}{4}\Gamma_2''$
$\Gamma_4'' = \Gamma_4' - \frac{5}{4}\Gamma_2''$
$\Gamma_5'' = \Gamma_5' + \frac{1}{4}\Gamma_2''$

Άρα $-\max(c^T x) = -\frac{14}{20} = -\frac{7}{10}$ $\left(\Rightarrow \max(c^T x) = \frac{7}{10}\right)$

Συνεπώς $\min(c^T x) = -\frac{7}{10}$

$$x^* = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{77}{10}, 0, 0, \frac{5}{2}, 0\right)^T$$

Ορισμός

I) Αν στην άριστη λύση του νέου π.γ.π. υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές με θετική τιμή, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις άρα ούτε κ' άριστες.
Συνεπώς $F = \emptyset$.

II) Αν $F \neq \emptyset$ δε μπορεί να περιέχει θετικές τιμές στις τεχνητές μεταβλητές της άριστης λύσης του νέου π.γ.π.

Θεωρήματα Δυϊσμού.

1. Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον πρόβλημα.
2. Αν το πρωτεύον πρόβλημα έχει άριστη λύση $\hat{x}$ τότε το δυϊκό έχει άριστη λύση $\hat{w}$ κ' ισχύει $c^T\hat{x} = b^T\hat{w}$.

Άσκηση

$$\begin{cases} \max(x_1+x_2+x_3) \\ 3x_2-2x_3 \le -3 \\ x_1+5x_2+2x_3 \le 4 \\ x_1+5x_2+2x_3 \ge 4 \quad \times(-1) \\ x_1,\dots,x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \max(x_1+x_2+x_3) \\ 3x_2-2x_3 \le -3 \\ x_1+5x_2+2x_3 \le 4 \\ -x_1-5x_2-2x_3 \le -4 \\ x_1,\dots,x_3 \ge 0 \end{array}$$

$\max(c^T x^*) = \frac{5}{2}$, $x^* = (1, 0, \frac{3}{2}, 0)^T$: αρχικό

$\min(b^T w^*) = \frac{5}{2}$, $w^* =$; : δυϊκό

Πρέπει να το φέρω στη μορφή δυϊκού:

$$\begin{cases} \min(-3w_1+4w_2-4w_3) \\ w_2-w_3 \ge 1 \\ 3w_1+5w_2-5w_3 \ge 1 \\ -2w_1+2w_2-2w_3 \ge 1 \\ w_1, w_2, w_3 \ge 0. \end{cases}$$

Αρχικό	→	Δυϊκό
$(\pm)\max \underline{c}^T x_i$		$(\pm)\min \underline{b}^T w_i$
$A x_i \le b_j$	→	$A^T w_i \ge c_j$
$x_i \ge 0$		$w_i \ge 0.$

Πως βρίσκουμε την άριστη λύση του δυϊκού:

Θέτω $w_2 - w_3 = w_4$

συνεπώς έχω:
$$\begin{cases} \min(-3w_1 + 4w_4) \\ w_4 \geq 1 \\ 3w_1 + 5w_4 \geq 1 \\ -2w_1 + 2w_4 \geq 1 \\ w_1, w_4 \geq 0. \end{cases}$$

Αν $\hat{w}$ άριστη λύση, τότε $\hat{w}_4 = 1$

- $3\hat{w}_1 + 5\hat{w}_4 = 1 \Rightarrow \hat{w}_1 = -4/3 < 0$ απορρίπτεται.
- $-2\hat{w}_1 + 2\hat{w}_4 = 1 \Rightarrow \hat{w}_1 = \frac{1}{2} > 0$ δεκτή.

Οπότε, $w^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$

$$\min(b^T w^*) = \left(-3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 1\right) = \frac{-3+8}{2} = \frac{5}{2}$$

Άρα, παρατηρώ ότι $\min b^T \hat{w} = \max c^T \hat{x}$.

Τετάρτη 31/10/2012

Άσκηση

$$\begin{cases} \min(2x_1 - 4x_2 + 6x_3) \\ x_1 - x_2 = 10 - x_3 - 2x_4 \\ 2x_2 + x_3 \geq -1 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_4 \leq 4 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\max(-2x_1 + 4x_2 - 6x_3) \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_4 + x_6 = 8 \\ x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{cases}$$