β) P_1, P_3, κ.ο.κ. παίρνω όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

5. <u>Η μέθοδος Simplex.</u>

Αλγόριθμος, περιπτώσεις:

- απειρία λύσεων:
  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ λύσεις τότε $\underline{x}(\lambda) = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$ είναι άριστη λύση, $\lambda \in (0,1)$
- μη φραγμένο
- εκφυλισμένη
- τεχνητές μεταβλητές.

Παρασκευή 26/10/2012.

<u>Άσκηση</u>

$\max(2x_1 + 2x_2)$

$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (\varepsilon_1)$

$2x_1 + x_2 \geq 4 \quad (\varepsilon_2)$

$x_2 \leq 3 \quad (\varepsilon_3)$

$2x_1 - x_2 \leq 4 \quad (\varepsilon_4)$

$x_1, x_2 \geq 0.$

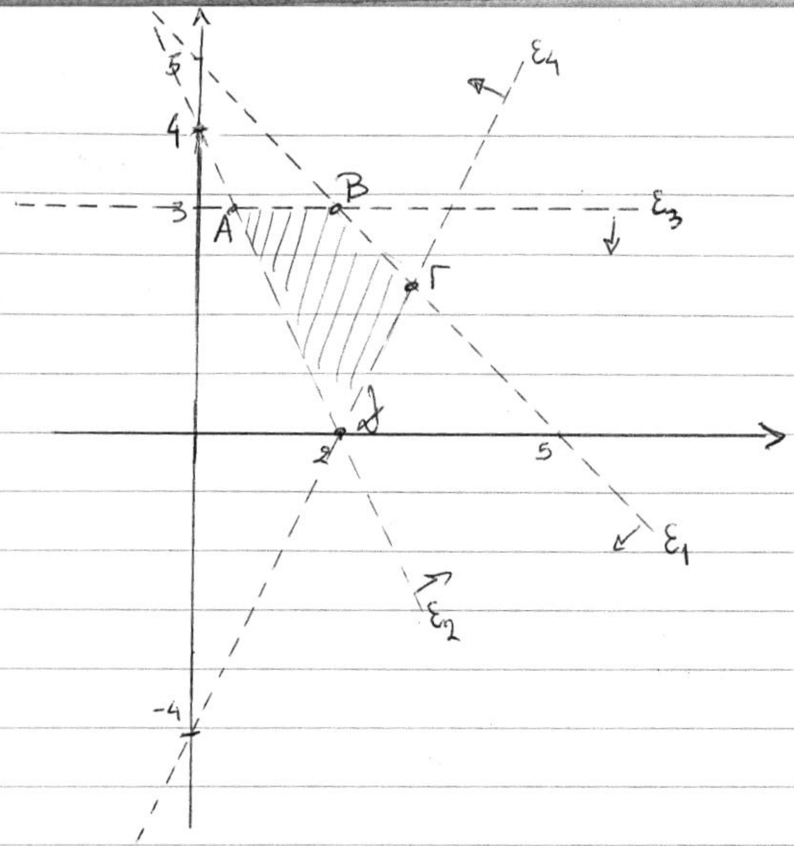
1. Να βρω την άριστη λύση (γραφικά)

$\varepsilon_1: x_1 + x_2 = 5 \rightsquigarrow (0,5), (5,0)$

$\varepsilon_2: 2x_1 + x_2 = 4 \rightsquigarrow (0,4), (2,0)$

$\varepsilon_3: x_2 = 3 \rightsquigarrow (0,3)$

$\varepsilon_4: 2x_1 - x_2 = 4 \rightsquigarrow (0,-4), (2,0)$



Κορυφές

$A = (\varepsilon_3 \cap \varepsilon_2) = (\frac{1}{2}, 3)$

$B = (\varepsilon_3 \cap \varepsilon_1) = (2, 3)$

$\Gamma = (\varepsilon_4 \cap \varepsilon_1) = (3, 2)$

$\Delta = (2, 0)$

Υπολογίζω : $c^T \underline{x}$, $\forall \underline{x} =$ κορυφή

$c^T A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3 = 7$

$c^T B = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 \leftarrow \max$

$c^T \Gamma = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10 \leftarrow \max$

$c^T \Delta = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 4$

Άρα έχω άπειρες λύσεις στο (ΒΓ).

2. Βρες την άριστη λύση με το ελάχιστο διανυσματικό μέτρο.

Αφού έχω 2 άριστες λύσεις τότε κάθε $x^* = \lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, με $0<\lambda<1$

[illegible]

Άρα $\exists \quad x^* = \lambda(2,3)+(1-\lambda)(3,2) = (3-\lambda, 2+\lambda)$

θέλω $\min \|x^*\|$

$\|x^*\| = (3-\lambda)^2+(2+\lambda)^2 = 2\lambda^2-2\lambda+13 = f(\lambda)$

$f'(\lambda)=4\lambda-2 \Rightarrow (f'(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2})$

$f''(\lambda)=4>0$ άρα στο $\lambda=\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}-1+13 = 12+\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$

$x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Άσκηση

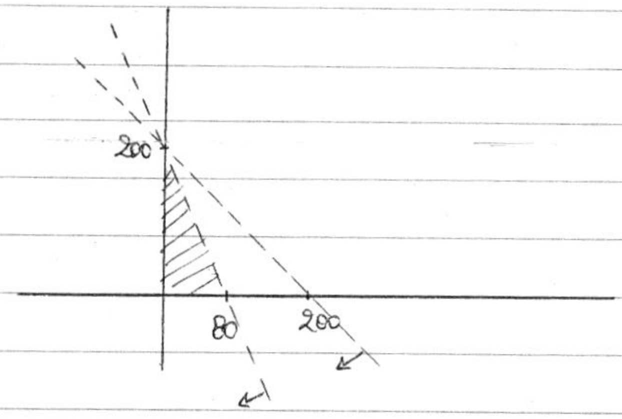
$\max(3000x_1+2000x_2)$

$x_1+x_2 \leq 200$

$5x_1+2x_2 \leq 400$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. Να λυθεί αλγεβρικά.



Κανονική μορφή

$\max(3000x_1+2000x_2)$

$x_1+x_2+x_3=200$

$5x_1+2x_2+x_4=400$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$0 \le x_1 \le 200$, $0 \le x_1 \le 80$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{0 \le x_1 \le 80}$

$\boxed{0 \le x_2 \le 200}$

$\boxed{0 \le x_3 \le 200}$

$\boxed{0 \le x_4 \le 400}$

Το ΠΠΠ είναι φραγμένο.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix}$$
$$\quad\ \ \underline{P}_1 \ \ \underline{P}_2 \ \ \underline{P}_3 \ \ \underline{P}_4$$

- $|\underline{P}_1\ \underline{P}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2-5 = -3 \neq 0 \Rightarrow P_1, P_2$ γραμ. ανεξ. (1)
- $|\underline{P}_1\ \underline{P}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow P_1, P_3$ γραμ. ανεξ. (2)
- $|\underline{P}_1\ \underline{P}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow P_1, P_4$ γραμ. ανεξ. (3)
- $|\underline{P}_2\ \underline{P}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow P_2, P_3$ γραμ. ανεξ. (4)
- $|\underline{P}_2\ \underline{P}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow P_2, P_4$ γραμ. ανεξ. (5)
- $|\underline{P}_3\ \underline{P}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow P_3, P_4$ γραμ. ανεξ. (6)

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 200 \\ 5x_1 + 2x_2 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \ge 0 \\ x_2 = 200 \ge 0 \end{matrix}$ άρα $(0, 200, 0, 0)$ εφικτή λύση

(2) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 200 \\ 5x_1 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 80 \ge 0 \\ x_3 = 120 \ge 0 \end{matrix}$ άρα $(80, 0, 120, 0)$ εφικτή λύση

(3) $\begin{cases} x_1 = 200 \\ 5x_1 + x_4 = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 200 \ge 0 \\ x_4 = -600 < 0 \end{matrix}$ άρα $(200, 0, 0, -600)$ απορρίπτεται

(4) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 200 \\ 2x_2 = 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \ge 0 \\ x_2 = 200 \ge 0 \end{cases}$ άρα $(0, 200, 0, 0)$ εφικτή λύση

(5) $\begin{cases} x_2 = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 200 \ge 0 \end{cases}$ άρα $(0, 200, 0, 0)$

(6) $\begin{cases} x_3 = 200 \geq 0 \\ x_4 = 400 \geq 0 \end{cases}$ άρα $(0,0,200,400)$ εφικτή λύση.

Εφικτές λύσεις		$1000(3x_1+2x_2)$	
(1)	$(0,200,0,0)$	400.000	← max
(2)	$(80,0,120,0)$	240.000	
(4)	$(0,200,0,0)$	400.000	← max
(5)	$(0,200,0,0)$	400.000	← max
(6)	$(0,0,200,400)$	0	

$$x^* = (0,200,0,0,0)$$

Ορισμός

~~Ο ορισμός της~~ μη εκφυλισμένη ~~βασικής εφικτής λύσης είναι~~

Βασική εφικτή λύση λέγεται κάθε βασική εφικτή λύση που έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες.

Ενώ η εκφυλισμένη έχει λιγότερες από m θετικές συντεταγμένες.

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\quad x_{io} = (b_1, b_2, b_3, 0, \dots, 0)$ ← μη εκφυλισμένη.

$\quad x_{io} = (b_1, 0, b_3, 0, \dots, 0)$ ← εκφυλισμένη

π.χ

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$
$$x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 11$$
$$2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$2x_4 + x_6 = 8$$
$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \dots \end{bmatrix}$ $\quad I = [P_1\ P_5\ P_6]$ $\quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ ← $b_2 = 0$

Θέτω $b^* = \begin{bmatrix} 11 \\ \varepsilon \\ 8 \end{bmatrix}$, $\varepsilon > 0$

$x^*_{io} = (11, 0, 0, 0, \varepsilon, 8)^T$

B	C_B	b	P_1 (−1)	P_2 (2)	P_3 (−3)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (0)	θ		
P_1	−1	11	1	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	−		Γ_1
P_5	0	ε	0	$\boxed{2}$	−1	0	1	0	$\frac{\varepsilon}{2}$	←	Γ_2
P_6	0	8	0	0	0	2	0	1	−		Γ_3
		−11	0	$-\frac{3}{2}$ ↑	2	−1	0	0			Γ_4

$\max|z|$, για $z<0$ $\rightsquigarrow$ $\max\{\frac{3}{2}, 1\} = \frac{3}{2}$

Άρα η P_2 θα γίνει βασική στη θέση της P_5 με πιλότο το 2.

B	C_B	b	P_1 (−1)	P_2 (2)	P_3 (−3)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (0)	θ		
P_1	−1	$11+\frac{\varepsilon}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$11+\frac{\varepsilon}{4}$		$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2'$
P_2	2	$\frac{\varepsilon}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	—		$\Gamma_2' = \frac{\Gamma_2}{2}$
P_6	0	8	0	0	0	$\boxed{2}$	0	1	4	←	$\Gamma_3' = \Gamma_3$
		$-11+\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	−1 ↑	$\frac{3}{4}$	0			$\Gamma_4' = \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_2'$

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	−1	$7+\frac{\varepsilon}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \Gamma_3''$
P_2	2	$\frac{\varepsilon}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\Gamma_2'' = \Gamma_2'$
P_4	0	4	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\Gamma_3'' = \frac{\Gamma_3'}{2}$
		$-7+\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + \Gamma_3''$

$$\begin{cases} -7 + \frac{3\varepsilon}{4} = \max \\ x^* = (7+\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}, 0, 4, 0, 0) \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \begin{cases} \max = -7 \\ x^* = (7, 0, 0, 4, 0, 0) \end{cases}$$