Ανακεφαλαίωση Γραμμικού Προγραμματισμού

1. Μαθηματική διατύπωση

π.χ.

Πρόβλημα παραγωγής, έστω n προϊόντων χρησιμοποιώντας m υλικά, c_j = κέρδος από κάθε προϊόν, $j=1,\dots,n$.
α_{ij} = απαιτούμενη ποσότητα από το υλικό i για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j, b_i = η διαθέσιμη ποσότητα του υλικού i, $i=1,\dots,m$.
Στόχος η μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση των προϊόντων. Έστω $x_1,\dots,x_n$ οι ποσότητες των προϊόντων $1,\dots,n$

$$\max\ c_1x_1+\dots+c_nx_n = \underline{c}^T\underline{x}$$

$$\begin{array}{l} \text{υλικό } 1: \\ \vdots \\ \text{υλικό } m: \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Τετάρτη 24/10/2012

Δυϊκό πρόβλημα

$$[\lambda_1 \dots \lambda_m] \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \geq [c_1 \dots c_n]$$

λ_j = τιμή του υλικού j. ανά μονάδα υλικού.

Τι τιμές των υλικών πρέπει να δώσουμε στον παραγωγό για να δελεαστεί να πουλήσει τα υλικά

$\min \underline{\lambda}^T \underline{b}$ $\qquad$ $\boxed{\underline{\lambda}^T \underline{b} \geq \underline{\lambda}^T A \underline{x} \geq \underline{c}^T \underline{x}}$

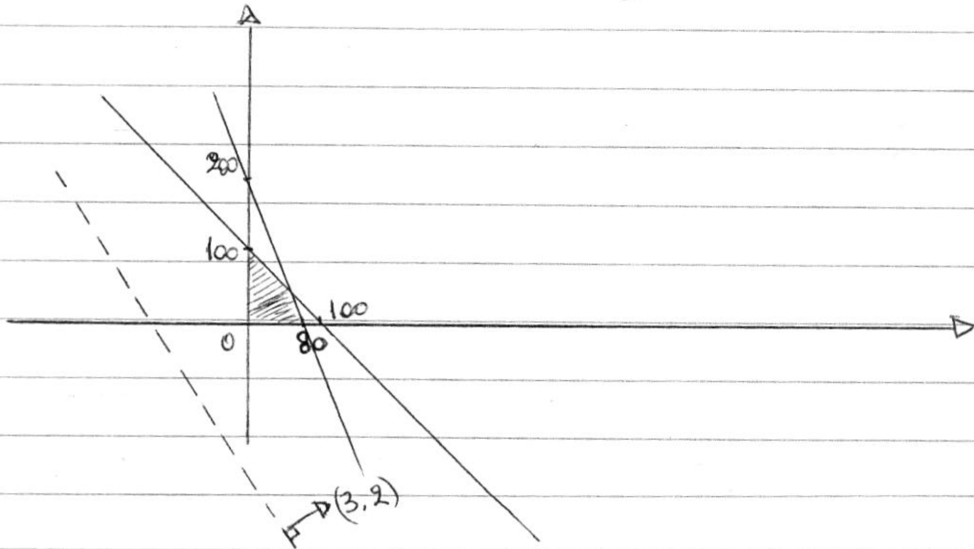
2. Γραφική επίλυση

Έστω ότι κερδίζει 1500 € από το προϊόν 1 κ' 1000 € από το προϊόν 2.

Έστω $x_1 + x_2 \leq 100$ ← μέγιστο απόθεμα του υλικού

$5x_1 + 2x_2 \leq 400$ ← -"- 2ου -"-

Θέλουμε $\max(1500x_1 + 1000x_2)$ $[\equiv 500 \max(3x_1 + 2x_2)]$



$3x_1 + 2x_2 = z$
↑
σταθερά

κάθετο διάνυσμα: (3, 2)

Πως βρίσκουμε τη λύση;

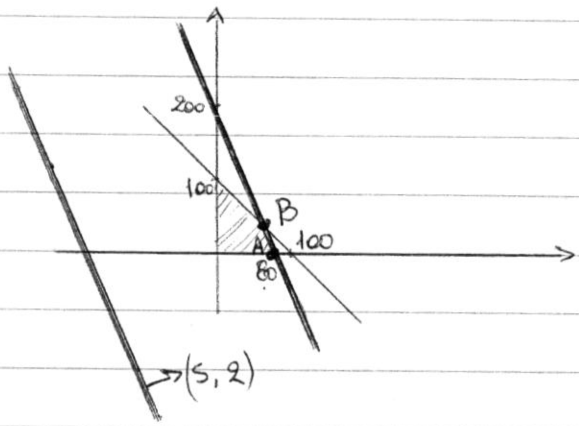
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 400 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{200}{3} \quad x_2 = \frac{100}{3}$$

η λύση είναι μοναδική γιατί κλίση της $\varepsilon_1 = \frac{100}{100} = 1 \neq \frac{3}{2}$

κ' κλίση της $\varepsilon_2 = \frac{200}{80} \neq \frac{3}{2}$

		3	2	0	0
		P_1	P_2	P_3	P_4
	100	1	1	1	0
	400	5	2	0	1
		-3	-2	0	0

Αν είχαμε max $5x_1 + 2x_2$:



		5	2	0	0
P_3	100	1	1	1	0
P_4	400	5	2	0	1
		-5	-2	0	0

⇓

P_3	20	0	$3/5$	1	$-1/5$
P_1	80	1	$2/5$	0	$1/5$
		0	$\boxed{0}$	0	1

Έχουμε $z_k - c_k = 0$ για k που αντιστοιχεί σε μη βασική στήλη.
Κάνοντας άλλο ένα βήμα της simplex, πάμε από την κορυφή A στην κορυφή B, που έχει το ίδιο κόστος, αφού $z_k - c_k = 0$.

3. Κανονική μορφή

Θεωρήματα ύπαρξης λύσης (αν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη, τότε το π.γ.π έχει άριστη λύση. Το αντίστροφο δεν ισχύει. π.χ. στο πρόβλημα της δίαιτας).

4. Ιδιότητες των λύσεων

<u>Ορισμοί</u> (π.χ. κυρτό σύνολο, κυρτό πολύεδρο, κτλ.)

<u>Θεωρήματα</u>

- Η εφικτή περιοχή είναι κυρτό σύνολο.
- Αν είναι κ' φραγμένη τότε είναι κυρτό πολύεδρο.
- Η άριστη λύση πετυχαίνεται σε κορυφή (αν η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη)
- Η $\underline{x}$ είναι βασική εφικτή λύση $\Leftrightarrow$ η $\underline{x}$ είναι κορυφή.

<u>π.χ.</u>

$$\max\left(3x_1+5x_2-2x_3+x_4\right)$$

$$x_1-x_2+x_3+x_4=5$$

$$2x_1+x_2+2x_3=1$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

$$\begin{array}{cccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \\ A= & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}} & \end{array} \qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη

$$2x_1\leq 2x_1+x_2+2x_3=1 \xrightarrow[\geq 0]{x_2,x_3} 2x_1\leq 1 \Rightarrow x_1\leq \tfrac{1}{2}. \text{ Άρα } 0\leq x_1\leq \tfrac{1}{2}.$$

αντίστοιχα, $0\leq x_3\leq \frac{1}{2}$ κ' $0\leq x_2\leq 1$.

Επίσης $x_1-x_2+x_3+x_4=5 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=5+x_2\leq 6 \xrightarrow[\geq 0]{x_1,x_3} x_4\leq 6$.

Άρα είναι όλα φραγμένα.

Οπότε υπάρχει λύση (άριστη) που πετυχαίνεται σε κορυφή κ' αντιστοιχεί σε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

α) P_1, P_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\begin{cases} x_1-x_2=5 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ \ldots \end{cases}$$ είναι κορυφή αλλά $x_2<0$

β) P_1, P_3 , κ.ο.κ. παίρνω όλους τους δυνατούς συνδυασμούς

5. Η μέθοδος Simplex.

Αλγόριθμος, περιπτώσεις:

- απειρία λύσεων:
  $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ λύσεις τότε $\underline{x}(\lambda) = \lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2$ είναι άριστη λύση, $\lambda \in (0,1)$
- μη φραγμένο
- εκφυλισμένη
- τεχνητές μεταβλητές.

Παρασκευή 26/10/2012.

Άσκηση

$$\max(2x_1+2x_2)$$

$$x_1+x_2 \leq 5 \quad (\varepsilon_1)$$

$$2x_1+x_2 \geq 4 \quad (\varepsilon_2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (\varepsilon_3)$$

$$2x_1-x_2 \leq 4 \quad (\varepsilon_4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

1. Να βρω την άριστη λύση (γραφικά)

ε_1: $x_1+x_2=5 \rightsquigarrow (0,5), (5,0)$

ε_2: $2x_1+x_2=4 \rightsquigarrow (0,4), (2,0)$

ε_3: $x_2=3 \rightsquigarrow (0,3)$

ε_4: $2x_1-x_2=4 \rightsquigarrow (0,-4), (2,0)$