Υπενθύμιση

$$\underline{\lambda}^T \underline{P}_{i^*} < c_{i^*} \Rightarrow x_{i^*} = 0.$$

Δοκιμάζουμε: $\hat{\underline{\lambda}}^T = \underline{\lambda}^T - \varepsilon \underline{u}_{i^*}$, όπου $B^{-1} = \begin{pmatrix} \text{——} u_1 \text{——} \\ \text{——} u_{i^*} \text{——} \\ \vdots \\ \text{——} u_m \text{——} \end{pmatrix}$

(u_i: γραμμές του B^{-1}) $\qquad B = (\underline{P}_1 | \dots | \underline{P}_m)$

$$\hat{\underline{\lambda}}^T \underline{P}_j = \underline{\lambda}^T \underline{P}_j - \varepsilon \underline{u}_{i^*} \underline{P}_j = \begin{cases} c_{i^*} - \varepsilon, & \text{αν } j = i^* \\ c_j, & \text{αν } j \neq i^*,\ 1 \leq j \leq m \\ z_j - \varepsilon y_{i^*j}, & \text{αν } j = m+1, \dots, n. \end{cases}$$

(όπου y_{i^*j} είναι ένα από τα στοιχεία του πίνακα simplex.)

$B^{-1}B = I$

$$\begin{pmatrix} \text{——} u_1 \text{——} \\ \vdots \\ \text{——} u_m \text{——} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ P_1 & \cdots & P_m \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

άρα $u_i P_i = 1$ για ίδιο i

ενώ $u_i P_j = 0$ για $i \neq j$.

Παρασκευή 19/10/2012

Αρχικό

$$\begin{cases} \min \underline{c}^T \underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0. \end{cases}$$

Δυϊκό

$$\begin{cases} \max \underline{\lambda}^T \underline{b} \\ \underline{\lambda}^T A \leq \underline{c} \\ \underline{\lambda} \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{φαγητά} \\ \text{θρεπτικές ουσίες} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Έστω $\mathcal{B}=(\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m)$ τω. το $\underline{\lambda}^T = \underline{c}_B \mathcal{B}^{-1}$ είναι βασική εφικτή λύση του δυικού προβλήματος

$\underline{\lambda}^T \underline{P}_j = c_j \;,\; j=1,\dots,m$

$\underline{\lambda}^T \underline{P}_j < c_j \;,\; j=m+1,\dots,n \;(\Rightarrow x_j = 0)$

Δοκιμάζουμε $\hat{\underline{\lambda}}^T := \underline{\lambda}^T - \varepsilon \underline{u}_{i^*}, \; \varepsilon>0.$

$$\mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{—} u_1 \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} u_m \text{—} \end{pmatrix} \leftarrow i^* \qquad \big[\, \underbrace{\underline{P}_1 \; \dots \; \underline{P}_m}_{B} \; \underline{P}_{m+1} \dots \underline{P}_n \,\big]$$

Οπότε, $\hat{\underline{\lambda}}^T \underline{P}_j = \begin{cases} \underline{\lambda}^T \underline{P}_j (= c_j), & j \neq i^*, \; j \in \{1,\dots,m\} \\ \underline{\lambda}^T \underline{P}_j - \varepsilon (<c_j), & j=i^* \\ \underline{\lambda}^T \underline{P}_j - \varepsilon \underbrace{y_{i^*j}}_{\text{(στοιχείο του πίνακα simplex)}}, & j=m+1,\dots,n \end{cases}$

$$\left(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1\underline{P}_1 & \underline{u}_1\underline{P}_2 & \dots & \underline{u}_1\underline{P}_m \\ \vdots & & & \\ \underline{u}_m\underline{P}_1 & & & \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right.$$

άρα $u_i P_j = 1$ αν $i=j$

κ' $u_i P_j = 0$ αν $i \neq j$.)

Επίσης, $\hat{\underline{\lambda}}^T \underline{b} = \underline{\lambda}^T \underline{b} - \varepsilon (\underline{x}_B)_{i^*} \qquad (\underline{x}_B = \mathcal{B}^{-1} \underline{b})$

$> \underline{\lambda}^T \underline{b}$ ← επιλέγω i^* τω. $(x_B)_{i^*} < 0$

άρα $-(x_B)_{i^*} > 0$.

Αν $y_{i^*j} \geq 0 \;\forall\, j=m+1,\dots,n$, η $\hat{\underline{\lambda}}$ είναι εφικτή λύση $\forall \varepsilon>0$.
οπότε το δυικό δεν έχει μέγιστο $(\varepsilon \to \infty)$

Αν όμως $y_{i^*j} < 0$ για κάποια j, επιλέγουμε το ε τω. αφενός να μην ξεπεράσουμε τη τιμή c_j (οπότε παραμένουμε σε εφικτές λύσεις) κ' αφετέρου διαλέγουμε το μικρότερο τω. $\underbrace{\underline{\lambda}^T \underline{P}_j}_{z_j} - \varepsilon y_{i^*j} \leq c_j$.

Επιλέγουμε $\varepsilon := \min \left\{ \dfrac{z_j - c_j}{y_{i^*j}} : y_{i^*j} < 0 \right\}$.

Δυϊκός αλγόριθμος simplex.

1. Έστω μια "δυϊκώς εφικτή" λύση $\underline{x}_B$
   Αν $\underline{x}_B \geq 0$ η λύση είναι βέλτιστη.
   Αν όχι, διαλέγουμε i^* τω. $(\underline{x}_B)_{i^*} < 0$.

2. Αν $y_{i^*j} \geq 0$, $j=1,\dots,n$, τότε το δυϊκό δεν έχει μέγιστο.
   Αν $y_{i^*j} < 0$, για κάποια j, τότε επιλέγουμε $\varepsilon = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{i^*j}} : y_{i^*j} < 0 \right\}$.
   $= \frac{z_{j^*} - c_{j^*}}{y_{i^*j^*}}$ (η νέα λύση παραμένει δυϊκώς εφικτή).

3. Σχηματίζουμε τη νέα βάση αντικαθιστώντας την $\underline{P}_{i^*}$ με τη $\underline{P}_{j^*}$, υπολογίζουμε τη νέα βασική λύση $\underline{x}_B$ κι επιστρέφουμε στο 1.

π.χ.

$$\min(3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

			3	4	5	0	0
B	C_B	$\underline{x}_B$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_4	0	-5	-1	-2	-3	1	0
P_5	0	-6	$\boxed{-2}$	-2	-1	0	1
			3	4	5	0	0

$\underline{c}$

οδηγός

(έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης) ← $c_j - z_j$

Η βάση $(\underline{P}_4, \underline{P}_5)$ αντιστοιχεί σε μια δυϊκώς εφικτή λύση, διότι $c_j - z_j \geq 0$, $\forall j$.

$\underline{x}_B = (0, 0, 0, -5, -6)$

$c_j - z_j \geq 0, \ \forall j \iff \underline{\lambda}^T A \leq \underline{c}^T$

Διαλέγουμε $i^* = 5$ (μια τυχαία απ' τις αρνητικές συνιστώσες του x_B)
Επιλέγουμε το j^*:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$\frac{z_j - c_j}{y_{5j}}$	$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{-4}{-2} = 2$	$\frac{-5}{-1} = 5$

$\rightsquigarrow \varepsilon = \frac{3}{2}, \quad j^* = 1$.

			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_4	0	-2	0	$\boxed{-1}$	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
P_1	3	3	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
		9	0	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

άξονας

Εδώ έχουμε πάλι μια δυϊκώς εφικτή λύση με $c_j - z_j \geq 0, \ \forall j$ κι $x_B = (3, 0, 0, -2, 0)$
Διαλέγουμε $i^* = 4$ κι ψάχνουμε το j^*.

	$j=2$	$j=3$	$j=5$
$\frac{z_j - c_j}{y_{4j}}$:	$\frac{-1}{-1} = 1$	$\frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$	$\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3$

$\rightsquigarrow \varepsilon = 1, \quad j^* = 2$

			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	4	2	0	1	$5/2$	-1	$1/2$
P_1	3	1	1	0	-2	1	-1
			0	0	1	1	1

Οπότε έχουμε κι εφικτή, άρα βέλτιστη λύση $x_B = (1, 2, 0, 0, 0)$.

Φάση Ι

1. Εξετάζουμε τις διαφορές $z_k - c_k$

   1α. Αν $z_k - c_k \geq 0, \forall k$ πάμε στο δυϊκό αλγόριθμο simplex. Το $\underline{b}$ μπορεί να έχει αρνητικές συντεταγμένες.

   1b. Αν $\exists\, r : z_r - c_r < 0$ κι $x_{ir} < 0, \forall i$ τότε το πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις ή είναι μη φραγμένο.

   1c. Αν οι 1α κι 1b δεν ισχύουν, τότε διαλέγουμε μια στήλη r με $z_r - c_r < 0$ κι ένα στοιχείο $x_{ir} > 0$. Η στήλη $\underline{P_i}$ φεύγει απ' τη βάση.

2. Η στήλη $\underline{P_j}$ που την αντικαθιστά ...

Δευτέρα 22/10/2012

2. Η στήλη $\underline{P_j}$ που θα την αντικαταστήσει ορίζεται από το κριτήριο:

$$\min_{k}\left\{\left|\frac{z_k - c_k}{x_{ik}}\right| : z_k - c_k > 0,\ x_{ik} < 0\right\}$$

$$\max_{k}\left\{\left|\frac{z_k - c_k}{x_{ik}}\right| : z_k - c_k < 0,\ x_{ik} > 0\right\}$$

κι παίρνουμε το μεταξύ τους ελάχιστο.

3. Πάμε στο επόμενο tableau simplex με οδηγό το x_{ij}.