Τετάρτη 3/10/2012

Ο αλγόριθμος simplex

Για ευκολία, έστω ότι ο πίνακας A περιέχει το μοναδιαίο I_m ως πρώτη βάση.
Δηλ.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & 0 & & 1 & & \vdots & \\ & \vdots & & 0 & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & & 0 & \\ & 0 & & 0 & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{e_1} & \underbrace{e_2} & \underbrace{e_m} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ j_1 & j_2 & j_m \end{array}$$

$A = (P_1, \dots, P_n)$

1.

	C_B	b	$P_1 \dots P_m$ ($c_1 \dots$)	$P_{m+1} \dots P_n$ ($\dots c_n$)	θ
P_1	c_1	$(x_0)_1$	I_m	$x_{1,m+1} \quad x_{1n}$	$\frac{(x_0)_s}{x_{sj}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots \quad \vdots$	
P_m	c_m	$(x_0)_m$		$x_{m,m+1} \quad x_{m,n}$	
		z_0	$0 \dots 0$	$z_{m+1}-c_{m+1} \dots z_n-c_n$	

$(k \leftarrow i)$

$(\uparrow j)$

Tableau simplex $[(m+1)\times(n+4)]$

2. Ελέγχουμε αν η $\underline{x}_0$ είναι άριστη εξετάζοντας τις διαφορές z_k-c_k:

2α. Αν $z_k - c_k \geq 0, \forall k=1,\dots,n$ (θεωρ. 1)

2b. Αν $z_j - c_j < 0$, για κάποιο $j \in \{m+1,\dots,n\}$ κ' $x_{ij} \leq 0, \forall i=1,\dots,m$ τότε το γ.π. είναι μη φραγμένο (θεωρ 2)

2c. Υπάρχει ένα τουλάχιστον j : $z_j - c_j < 0$ κ' ένα τουλάχιστον i τ.ω. $x_{ij} > 0$. Οπότε πάμε στο 3.

3. Η στήλη P_j : $|z_j - c_j| = \max\{|z_k - c_k| : z_k - c_k < 0, k = m+1,\dots,n\}$.

4. $\underline{P}_i : \frac{(x_0)_i}{x_{ij}} = \min_s \left\{ \frac{(x_0)_s}{x_{sj}} : x_{sj} > 0 \right\}$ (Θεωρ. 2)

5. Το στοιχείο x_{ij} λέγεται οδηγός (ή πιλότος, pivot)

Στο νέο tableau έχουμε τα στοιχεία : $x'_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_{ij}}$, $k=0,1,\dots,n$

$$x'_{sk} = x_{sk} - \frac{x_{ik}}{x_{ij}} x_{sj}, \quad s=1,\dots,m+1, \ s \neq i, \ k=0,\dots,n.$$

Η νέα i-γραμμή $\Gamma'_i = \frac{\Gamma_i}{x_{ij}}$

Η νέα $s(\neq i)$-γραμμή $\Gamma'_s = \Gamma_s - \Gamma'_i x_{sj}$

<u>π.χ.</u>

$$\max(5x_1 - 4x_2)$$
$$-x_1 + x_2 \geq -6$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Σε κανονική μορφή: $\max(5x_1 - 4x_2)$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_5 = 9.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Άρα,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{βάση}}{B} = (\underline{P}_3 \ \underline{P}_4 \ \underline{P}_5)$$

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα:

B	C_B	b	P_1 (5)	P_2 (−4)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (0)	θ		
P_3	0	6	1	−1	1	0	0	$6/1=6$	← i	Γ_1
P_4	0	24	3	−2	0	1	0	$24/3=8$		Γ_2
P_5	0	9	−2	3	0	0	1	—		Γ_3
		0	−5	4	0	0	0			Γ_4

j ↑

$\underbrace{-5 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{Z_k - C_k}$

$$Z_k = \sum_{i=1}^{3} C_{B_i} X_{ik}$$

$\boxed{i=1,\ j=1}$

Οπότε η στήλη P_1 θα γίνει βασική
Για να βρούμε ποια θα αντικαταστήσει η P_1 συμπληρώνουμε τη στήλη θ
Πρέπει να υπολογίσουμε τα $\frac{(X_0)_s}{X_{sj}}$, για $j=1,\dots,s : x_{sj}>0$.
κ' ψάχνουμε το min.
Οπότε, αφού $6=\min(6,8)$ θα αντικατασταθεί η P_3 στήλη κ' οδηγός είναι το στοιχείο $X_{ij}=1$

$$\Gamma_1' = \frac{\Gamma_1}{1} = \Gamma_1$$
$$\Gamma_2' = \Gamma_2 - 3\Gamma_1' = (6,0,1,-3,1,0)$$
$$\Gamma_3' = \Gamma_3 - (-2)\Gamma_1' = (21,0,1,2,0,1)$$

2ος tableau simplex

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ	
P_1	5	6	1	−1	1	0	0	—	
P_4	0	6	0	$\boxed{1}$	−3	1	0	6	← i
P_5	0	21	0	1	2	0	1	21	
		30	0	−1	5	0	0		

↑

Τώρα πρέπει ν' αντικαταστήσουμε τη $\underline{P}_2$ με τη $\underline{P}_4$.
ο οδηγός είναι το $1 = x'_{22}$

$$\Gamma_2'' = \Gamma_2' = (6, 0, 1, -3, 1, 0)$$

(στην ουσία μ' ενδιαφέρει η Γ_4'')

$$\Gamma_4'' = \Gamma_4' - (-1)\Gamma_2' = (36, \underbrace{0, 0, 2, 1, 0}_{\text{όλα θετικά ή μηδέν, κανένα αρνητικό}})$$

Άρα η μέγιστη τιμή είναι 36 κ' το πρόβλημα λύθηκε.
κ' η στήλη $\underline{b}$ που θα προκύψει θα είναι το ζητούμενο $\underline{x}$.

Παρατηρήσεις

1. Ερμηνεία της οδήγησης:

Έστω $\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m$ γραμμικά ανεξ., βάση

$$\underline{P}_j = x_{1j}\underline{P}_1 + \dots + x_{mj}\underline{P}_m \quad (1)$$

Ο πίνακας A δίνει την αναπαράσταση των $\underline{P}_j$, $j = 1, \dots, n$
ως προς τη δοθείσα βάση.

Έστω ότι θέλουμε ν' αντικαταστήσουμε το βασικό διάνυσμα
$\underline{P}_p$, $1 \le p \le m$, από το μη βασικό $\underline{P}_q$.

Το αποτέλεσμα θα είναι κ' πάλι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (βάση) αν κ' μόνο αν $x_{pq} \neq 0$ κ' κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός της νέας βάσης.

Έχουμε $\underline{P}_q = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq p}}^{m} x_{j'q}\underline{P}_{j'} + x_{pq}\underline{P}_p \quad (2)$

(3)

Λύνουμε ως προς $\underline{P}_p$ κ' αντικαθιστούμε στην (1).

$$(3): \underline{P}_q = \frac{1}{x_{pq}} \underline{P}_q - \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq p}}^{m} \frac{x_{j'q}}{x_{pq}} \underline{P}_{j'}$$

Οπότε:

$$\underline{P}_j = \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq p}}^{m} \left(x_{j'j} - \frac{x_{j'q}}{x_{pq}} x_{pj} \right) \underline{P}_{j'} + \frac{x_{pj}}{x_{pq}} \underline{P}_q$$

2. Αν ο A δεν εμπεριέχει το μοναδιαίο πίνακα χρησιμοποιούμε "τεχνητές μεταβλητές":

$$\underline{y} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k}), \quad k \leq m$$

κ' έχουμε τον επαυξημένο πίνακα $\tilde{A} \in M_{m \times (n+k)}$ ως

$$\tilde{A} = [A \mid I_{m \times m}]$$

Ορίζουμε τους συντελεστές $\tilde{c}_i = \begin{cases} c_i, & i=1,\dots,n \\ M, & i=n+1,\dots,n+k \end{cases}$

όπου M είναι ένας αυθαίρετα μικρός αριθμός ($M <<$)

Έστω $\underline{M} = (M, \dots, M)$

Οπότε έχουμε το επαυξημένο πρόβλημα:

$$\begin{cases} \max(\underline{c}^T \underline{x} + \underline{M}\underline{y}) \\ \tilde{A}\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0, \ \underline{y} \geq 0 \end{cases}$$